I238 Computation Thoery Report (1)

2018, Term 1-1
Ryuhei Uehara(Room I67b, `uehara@jaist.ac.jp`)

Propose(出題): April 26 (Thu)

Deadline(提出期限): May 8 (Tue), 10:50am.

Note(注意): レポートには氏名，学生番号，問題，解答を忘れずに書くこと．電子メールで PDF ファイルを送ってくれてもよい．メールで PDF ファイルを送るときは，メール本文に学生番号と氏名を明記し，添付ファイル名は「学生番号.pdf」とすること．また JAIST のアカウントからメールすること．Word ファイルは不可．締切は厳守．解答は日本語でも英語でもよい．(Do not forget to write your name, student ID, problems, and answers on your report. You can send your report by email in PDF file format. In the email, write your name with student ID in the body, and the name of attached file is “student ID.pdf”. You should send it from JAIST account. The report in Word file format will not be accepted. Deadline is strict. You can answer in English or Japanese.)

以下の問題から 2 問選んで答えよ (各 10 点)．3 問以上答えたときは，良い方から採用する．(Answer two of the following problems (10pts). If you solve three or more, I will choose the best ones according to your score :-)

Problem 1: 講義の中で，チューリングマシンの形式的定義を行った．その際に,「入力が 2 進数の偶数なら受理」という言語の認識問題を解くチューリングマシンを紹介した．あれと同様に次の言語の認識問題を解くチューリングマシンを示せ．

Input: 正の自然数の 2 進数表記 x．ただし 0 で始まる文字列は 2 進数表記とはみなさない．つまり 0 は受理しない．

Output: x が正しい正の自然数の 2 進数表記であれば，テープ上に $\lfloor x/2 \rfloor$ を書き残して受理．さもなくば拒否．ただし $\lfloor x/2 \rfloor$ は，x を 2 で割って小数点以下を切り捨てた自然数．

入力が 1 のときの挙動は適当に定義してよいが，どう定義したか明記すること．(In the class, Uehara defined a Turing machine by a formal definition. Then Uehara introduced a Turing machine that recognizes the language “input is an even number in the binary system.” In a similar way, show a Turing machine that recognize the following language:

Input: Positive natural number x in the binary system. We do not consider it is not in binary system if the string starts with 0. Namely, it does not accept 0.

Output: If x is a correct representation of a positive natural number in the binary system, it accepts with writing $\lfloor x/2 \rfloor$ on the tape, otherwize it rejects. Here, $\lfloor x/2 \rfloor$ is the natural number obtained by dividing by 2 and rounding.

You can define the output for $x = 1$, but describe your definition.)

Problem 2: $X_1, X_2, \ldots$ をチューリングマシンとし，$x_1, x_2, \ldots$ を対応する 2 進文字列とする．(つまり x_i はチューリングマシン X_i を 2 進文字列で記述したものである．) X_i に 2 進文字列 x を与えたときの出力を $X_i(x)$ と書くことにする．二つの文字列 x と y に対し，これらの連接を $x \cdot y$ と書く（例えば $000 \cdot 111 = 000111$ である）．ここで次の関数 f を考える．

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot 1 \cdot X_i(x_i) & X_i \text{ に入力 } x = x_i \text{ を与えたら停止するとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この関数 f が計算不能であることを証明せよ．(Let $X_1, X_2, \ldots$ be the Turing machines, and $x_1, x_2, \ldots$ are the corresponding binary string. (That is, a string x_i is the binary code of the Turing machine X_i.) We denote the output of X_i with a binary input x by $X_i(x)$. For two strings x and y, their concatenation is denoted by $x \cdot y$ (e.g., $000 \cdot 111 = 000111$). Let f be the function defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot 1 \cdot X_i(x_i) & \text{if } X_i \text{ halts for the input } x = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Prove that this function f is not computable.)

Problem 3: 自然数の集合 N は可算無限集合である．N の部分集合の集合 2^N は非可算無限集合であることを対角線論法で証明せよ．(The set N of natural numbers is countable. Now, prove that the set 2^N of subsets of N is *not* countable by diagonalization.) (Hint: For $S = \{1, 2, 3\}$, we have $2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.)

Problem 4: 授業の中で「実数全体の集合 P は非可算である」という定理の証明を行った．このスライドの中の「実数」をすべて「有理数」で置き換えてみると，一見「有理数全体の集合 P' は非可算である」という定理の証明になる．しかし有理数は可算である．証明のどこが間違っているか，指摘せよ．(In one slide of the lecture, we prove the theorem that claims “The set P of all real numbers is not countable.” Now let replace every “real” by “rational”. Then it seems that we prove the theorem that claims “The set P' of all rational numbers is not countable.” But, the set of all rational numbers is countable. Point out where is wrong.)