

# 1238 計算の理論

上原 隆平

2018年I-1期(4-5月)

# I238 Computation Theory

by

Prof. Ryuhei Uehara

Term I-1, April-May, 2018

# 計算(量)の理論

- ゴール1:
  - “計算可能な関数/問題/言語/集合”
    - 関数には2種類存在する;
      1. 計算不能(!)な関数
      2. 計算可能な関数
- ゴール2:
  - 「問題の困難さ」を示す方法を学ぶ
    - 計算可能な問題であっても、手におえない場合がある！
      - 計算に必要な資源(時間・領域)が多すぎるとき

# Computation Theory/ Computational Complexity

- Goal 1:
  - “*Computable Function/Problem/Language/Set*”
    - We have two functions;
      1. Functions that are not computable!
      2. Functions that are computable.
- Goal 2:
  - How can you show “*Difficulty of Problem*”
    - There are *intractable* problems even if they are computable!
      - because they require too many resources (time/space)!

# 計算(量)の理論

- ゴール1:
  - “計算可能な関数/問題/言語/集合”
    - 関連する専門用語;  
計算可能性、対角線論法
- ゴール2:
  - 「問題の困難さ」を示す方法を学ぶ
    - 関連する専門用語;  
クラスNP,  $P \neq NP$ 予想, NP困難性, 還元

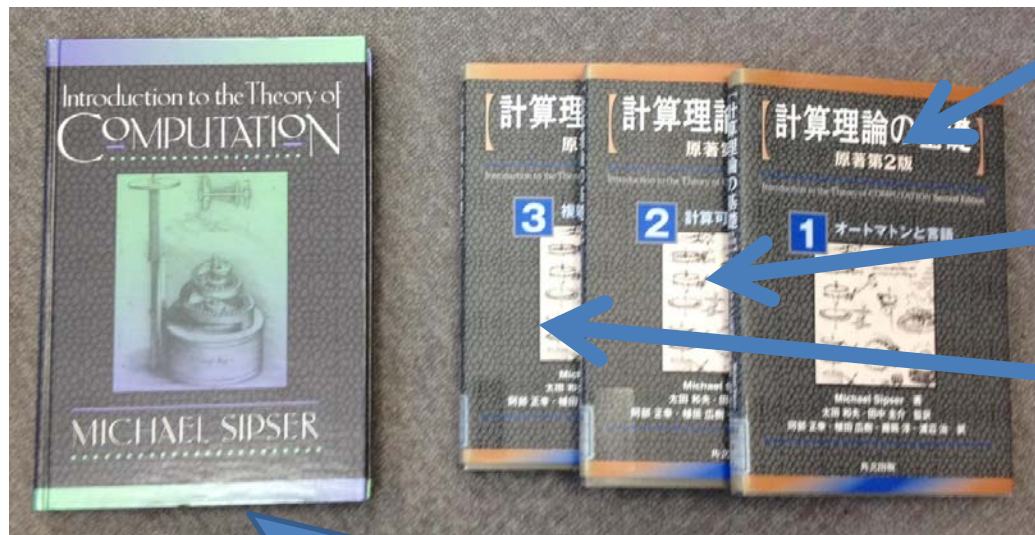
# Computation Theory/ Computational Complexity

- Goal 1:
  - “*Computable Function/Problem/Language/Set*”
    - Technical terms;  
computability, diagonalization
- Goal 2:
  - How can you show “*Difficulty of Problem*”
    - Technical terms;  
The class NP, P≠NP conjecture, NP-hardness, reduction

# 教科書

“Introduction to the Theory of Computation”

Michael Sipser, PWS Publishing Company, 1997.



第1部 (1, 2章)  
オートマトンと言語  
... l118 グラフとオートマトン

第2部 (3, 4, 5, 6章)  
計算可能性の理論  
... ゴール1

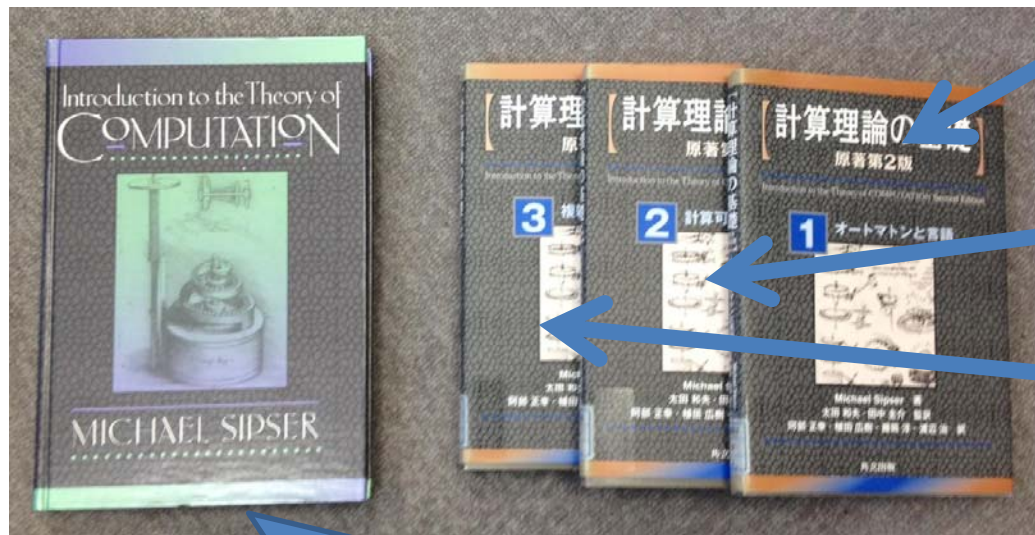
第3部 (7, 8, 9, 10章)  
複雑さの理論  
... ゴール2

英語版は3<sup>rd</sup> editionが出ているけれど...

# Text book

“Introduction to the Theory of Computation”

Michael Sipser, PWS Publishing Company, 1997.



Part 1 (Chaps. 1, 2)  
Automata and Languages  
... 1118 Graphs & Automata

Part 2 (Chaps. 3, 4, 5, 6)  
Computability Theory  
... 1<sup>st</sup> Goal

Part 3 (Chaps. 7, 8, 9, 10)  
Complexity Theory  
... 2<sup>nd</sup> Goal

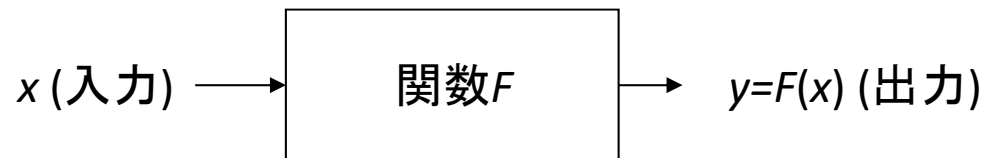
3<sup>rd</sup> edition is available in English Edition...



# 1. 関数・問題・言語・集合

## 1. 関数・問題・言語・集合とは何か？

**関数:** 入力と出力の対応関係



ポイント: 同じ入力  $x=x_1$  と  $x=x_2$  に対して同じ出力  $F(x_1)=F(x_2)$ .

**問題:** 関数を計算すること

例. **ソート問題(並べ替え)**

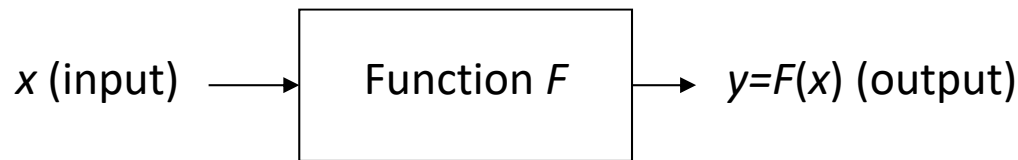
入力: 自然数の列  $a_1, a_2, \dots, a_n$

出力: 小さい順に並べ替えた列  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ .

# 1. Function/Problem/Language/Set

## 1. What are *functions/problems/languages/sets*?

*Function*: correspondence between Input & Output



Point: For the same  $x=x_1$  and  $x=x_2$ , we always have  $F(x_1)=F(x_2)$ .

*Problem*: computation of a function

E.g. **Sorting Problem**

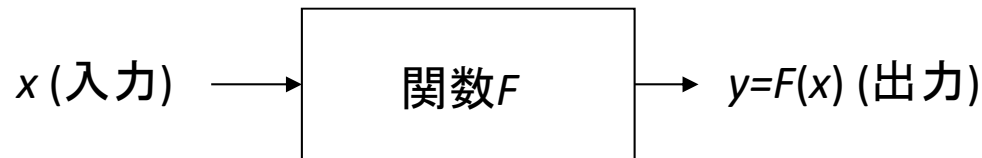
input: sequence of natural numbers  $a_1, a_2, \dots, a_n$

output: increasing order  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ .

# 1.関数・問題・言語・集合

## 1. 関数・問題・言語・集合とは何か？

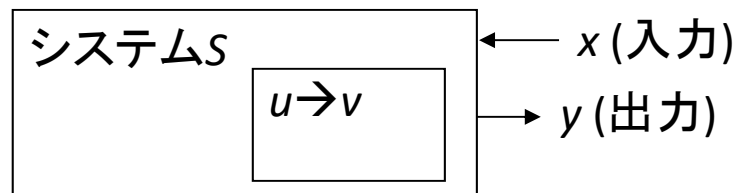
**関数:** 入力と出力の対応関係



ポイント: 同じ入力  $x=x_1$  と  $x=x_2$  に対して同じ出力  $F(x_1)=F(x_2)$ .

**問題:** 関数を計算すること

例. コンピュータシステムSのふるまい

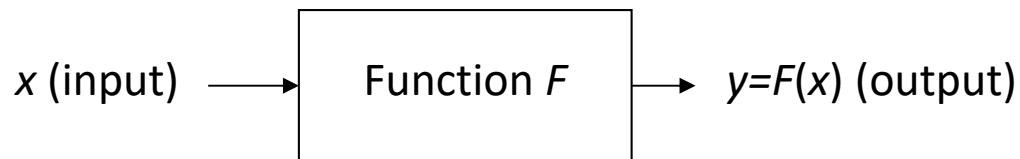


$(x,u)$ から $(y,v)$ への関数を計算する問題とみなしてよい

# 1. Function/Problem/Language/Set

## 1. What are *functions/problems/languages/sets*?

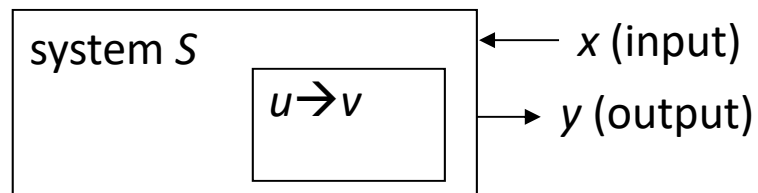
*Function*: correspondence between Input & Output



Point: For the same  $x=x_1$  and  $x=x_2$ , we always have  $F(x_1)=F(x_2)$ .

*Problem*: computation of a function

E.g. **Performance of a computer system  $S$**



problem of computing a function to map  $(x,u)$  to  $(y,v)$

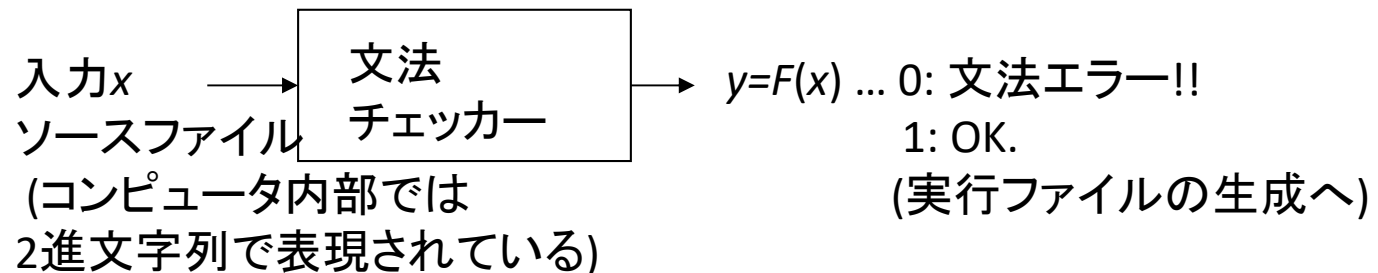
# 1.関数・問題・言語・集合

## 1. 関数・問題・言語・集合とは何か？

典型的な関数: 2進文字列で表現された  $x$  に対して、  
0か1を計算する



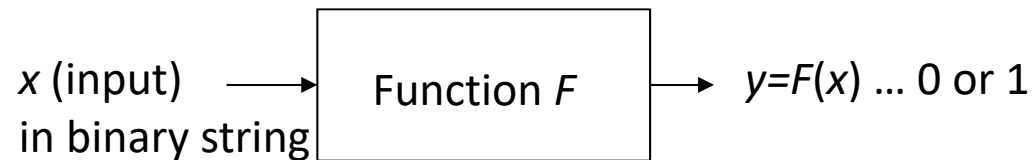
### 例. コンパイラの文法チェック



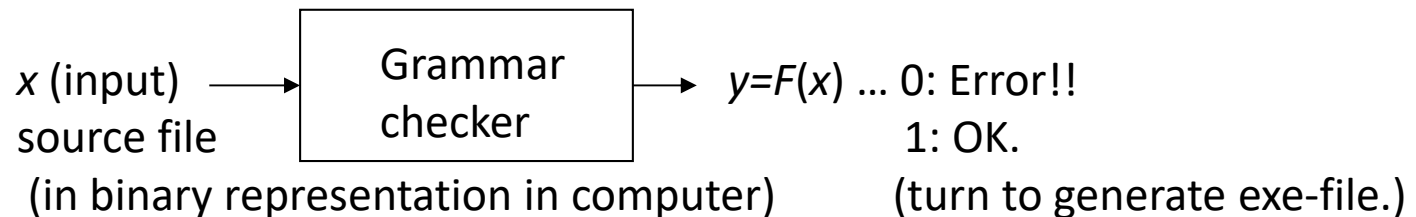
# 1. Function/Problem/Language/Set

## 1. What are *functions/problems/languages/sets*?

Typical *Function*: computation of 0/1 for given  $x$  in binary string



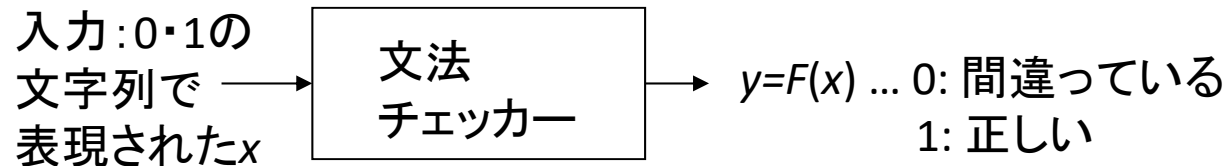
E.g. **Grammar check in C compiler**



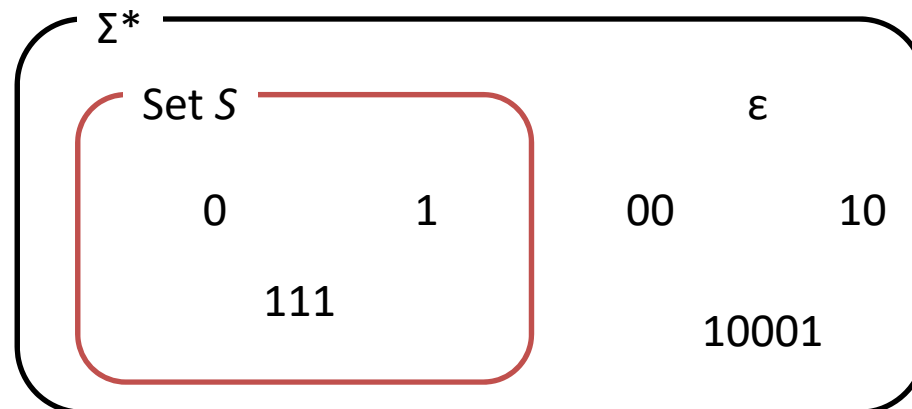
# 1.関数・問題・言語・集合

## 1. 関数・問題・言語・集合とは何か？

言語の認識問題: 与えられた  $x$  が(与えられた文法のもとで)正しい「語」であるかどうかを判定する



集合の認識問題: 与えられた  $x$  が集合  $S$  の要素かどうかを判定する



$\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$

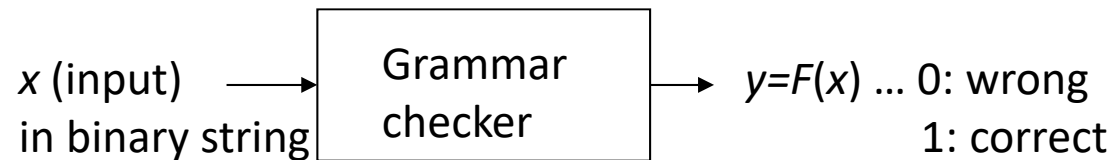
$\epsilon$ : 長さ0の空文字列

$S = \{0, 1, 111, \dots\}$

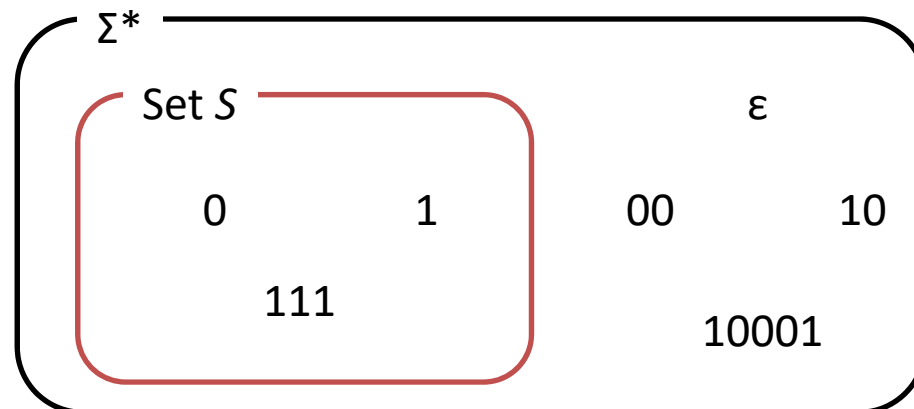
# 1. Function/Problem/Language/Set

## 1. What are *functions/problems/languages/sets*?

*Language* recognition: decide if given  $x$  is a correct “word” (for given grammar)



*Set* recognition: decide if given  $x$  is in some  $S$  or not



$\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$

$\epsilon$ : empty string of length 0

$S = \{0, 1, 111, \dots\}$



# 1.関数・問題・言語・集合

[注意] この講義では以下の2値関数だけを考える.

$f(x):\Sigma^* \rightarrow \Sigma$ , where  $\Sigma=\{0,1\}$  (and  $\Sigma^*=\{\epsilon,0,1,00,01,10,11,\dots\}$ )

...なぜ?

[理由] 計算の本質を変えずに議論を単純化できる.

- 一般のアルファベット?
- 複数の入力?
- 複数の出力?
- デジタルでないデータ?

...

# 1. Function/Problem/Language/Set

[Note] In this class, we only consider *binary functions*

$f(x):\Sigma^* \rightarrow \Sigma$ , where  $\Sigma=\{0,1\}$  (and  $\Sigma^*=\{\epsilon,0,1,00,01,10,11,\dots\}$ )

...Why?

[Reason] We can simplify the arguments without changing the essence of computation.

- General alphabets?
- Multiple inputs?
- Multiple outputs?
- Non-digital data?

...

# 1.関数・問題・言語・集合

[注意] この講義では以下の2値関数だけを考える.

$f(x):\Sigma^* \rightarrow \Sigma$ , where  $\Sigma=\{0,1\}$  (and  $\Sigma^*=\{\epsilon,0,1,00,01,10,11,\dots\}$ )

...なぜ?

[根拠1] どんなデータも**バイナリ**文字列で表現できる.

例1: アルファベット(a-z,0-9,...) はASCIIコードで8ビットで表現できる

例2: 音楽は mp3 フォーマットで符号化できる

例3: 写真は jpeg フォーマットで符号化できる

...

# 1. Function/Problem/Language/Set

[Note] In this class, we only consider *binary functions*

$f(x):\Sigma^* \rightarrow \Sigma$ , where  $\Sigma=\{0,1\}$  (and  $\Sigma^*=\{\epsilon,0,1,00,01,10,11,\dots\}$ )

...Why?

[Base 1] Any data can be represented by *binary* strings.

Ex.1: Any alphabet (a-z,0-9,...) can be encoded in 8bit binary string by ASCII code.

Ex.2: Any music can be encoded in mp3 format.

Ex.3: Any photo can be encoded in jpeg format.

...

# 1.関数・問題・言語・集合

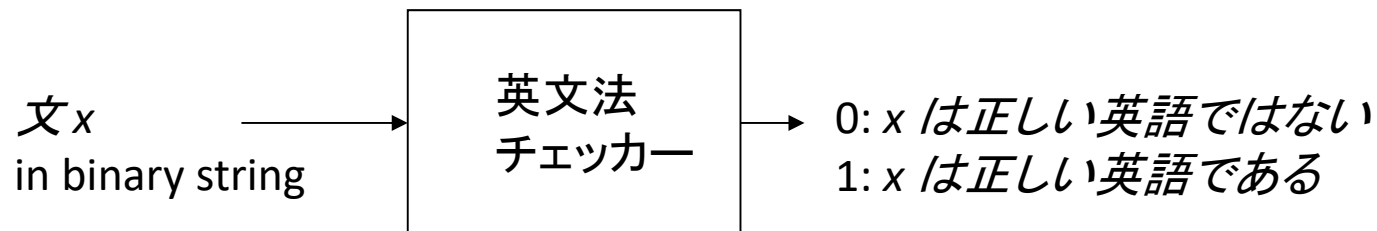
[注意] この講義では以下の2値関数だけを考える.

$f(x):\Sigma^* \rightarrow \Sigma$ , where  $\Sigma=\{0,1\}$  (and  $\Sigma^*=\{\epsilon,0,1,00,01,10,11,\dots\}$ )

...なぜ?

[根拠2] どんな言語も2値関数で認識できる

例1: 「英文」は次の関数で認識できる



# 1. Function/Problem/Language/Set

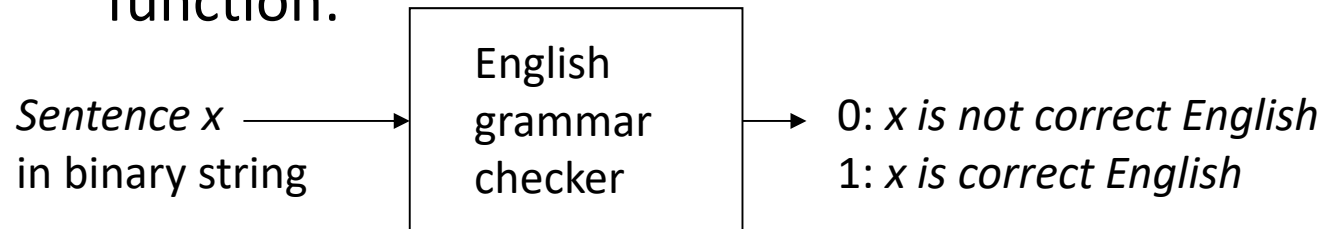
[Note] In this class, we only consider *binary functions*

$f(x):\Sigma^* \rightarrow \Sigma$ , where  $\Sigma=\{0,1\}$  (and  $\Sigma^*=\{\epsilon,0,1,00,01,10,11,\dots\}$ )

...Why?

[Base 2] Any language can be *recognized* by some binary function as follows.

Ex.1: any *English sentence* be recognized by the following function:



# 1.関数・問題・言語・集合

[注意] この講義では以下の2値関数だけを考える.

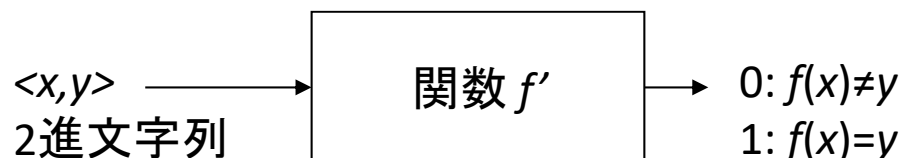
$f(x):\Sigma^* \rightarrow \Sigma$ , where  $\Sigma=\{0,1\}$  (and  $\Sigma^*=\{\epsilon,0,1,00,01,10,11,\dots\}$ )

...なぜ?

[根拠3] どんな関数でも, ある意味で同等の  
バイナリ関数に「翻訳」できる

例: 整数上の関数  $f(x)=y$  は次のように翻訳できる:

- 任意の整数  $x$  は2進数で表現できる
- “ $f(x)=y$ ” の計算は次の yes/no タイプの関数  $f'$  に翻訳できる



関数  $f'$  と関数  $f$  は  
同程度に難しいと考える

# 1. Function/Problem/Language/Set

[Note] In this class, we only consider *binary functions*

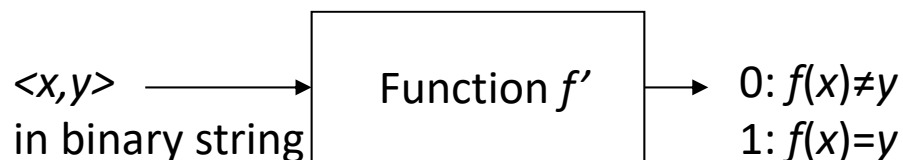
$f(x):\Sigma^* \rightarrow \Sigma$ , where  $\Sigma=\{0,1\}$  (and  $\Sigma^*=\{\epsilon,0,1,00,01,10,11,\dots\}$ )

...Why?

[Base 3] Any function can be *interpreted* into another binary function in a sense.

Ex. : for any  $f(x)=y$  over integers can be represented as...

- Any integer  $x$  can be represented in binary number.
- Computation of “ $f(x)=y$ ” can be represented by the following yes/no type function  $f'$



We consider that  $f'$  is as hard as  $f$



# 1.関数・問題・言語・集合

[注意] この講義では以下の2値関数だけを考える.

$f(x):\Sigma^* \rightarrow \Sigma$ , where  $\Sigma=\{0,1\}$  (and  $\Sigma^*=\{\epsilon,0,1,00,01,10,11,\dots\}$ )

...なぜ?

[演習問題1] 以下のソート問題はどうやって2値関数に  
翻訳すればよいだろう?

ソート問題(並べ替え)

入力: 自然数の列  $a_1, a_2, \dots, a_n$

出力: 小さい順に並べ替えた列  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ .

# 1. Function/Problem/Language/Set

[Note] In this class, we only consider *binary functions*

$f(x): \Sigma^* \rightarrow \Sigma$ , where  $\Sigma = \{0,1\}$  (and  $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$ )

...Why?

[Exercise 1] How can you *interpret* the following sorting problem into binary function?

## Sorting Problem

input: sequence of natural numbers  $a_1, a_2, \dots, a_n$

output:  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$  in increasing order

## 2. アルゴリズム

### 2. アルゴリズムとは何か？

#### 問題を解くための「アルゴリズム」

- 問題で指定された出力を計算するための方法
    - 何を計算するか？
    - どのように計算するか？
- この二つは異なる

#### 例. 2次方程式の根を求める問題

入力: 有理数  $a, b, c$

出力: 方程式  $ax^2+bx+c=0$  を満たす  $x$

- 出力の定義は明確だが、どのようにして求めたらよいのか？

“アルゴリズム = 方法”

→ アルゴリズム = 「プログラム」として記述できる「方法」

プログラム ... 「マシンモデル」に依存

→ “計算可能性”の歴史

# 2. Algorithm

## 2. What are Algorithms?

### **Algorithm for solving a problem**

- method for computing an output specified in the problem.
    - *What* to be computed?
    - *How* to compute?
- > different

E.g. Problem of calculating a root of a quadratic equation

input: rational numbers  $a, b, c$

output: an  $x$  that satisfies  $ax^2+bx+c=0$

- Output is clearly defined but how can we find it?

"Algorithm = method"

→ algorithm = a method that can be realized as a *program*

program ... depends on "machine model"

→ history of "computability"

# 3. マシンモデルと計算可能性

## 3. 「計算」とは何か？

“「計算可能」な関数とは?”

クリーネによる帰納的関数理論

チューリングによるチューリング機械の理論

→ 帰納的関数全体の集合

= チューリング機械で計算できる関数全体の集合

チャーチの提唱による「計算可能」の定義:

この集合を「計算可能」な関数としよう!

# 3. Machine model & computability

## 3. Studies on what is a computation.

“When do we call a function computable?”

Recursive function theory by Kleene

Turing machine theory by Turing

→ the whole set of recursive functions

= the whole set of functions computable by Turing machines

**Church's Thesis** on the definition of “computability”:

This is the set of “computable” function!

# 3. マシンモデルと計算可能性

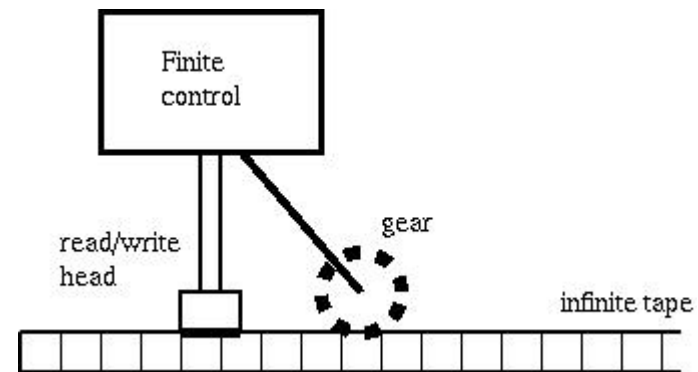
## 3. 「計算」とは何か？

### チューリングマシンモデルの構成要素

- 有限制御部
- 無限長のテープ  
読み書きヘッド

初期状態:

1. テープには「文字」列
2. ヘッドは一番左にある



# 3. Machine model & computability

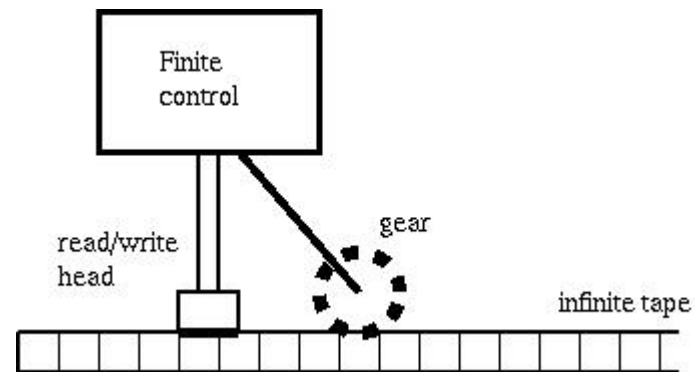
## 3. Studies on what is a computation.

Turing machine model consists of

- finite control
- infinitely long tape with read/write head

Initially,

1. tape consists of “letters”
2. the head is located at the leftmost position





# 3. マシンモデルと計算可能性

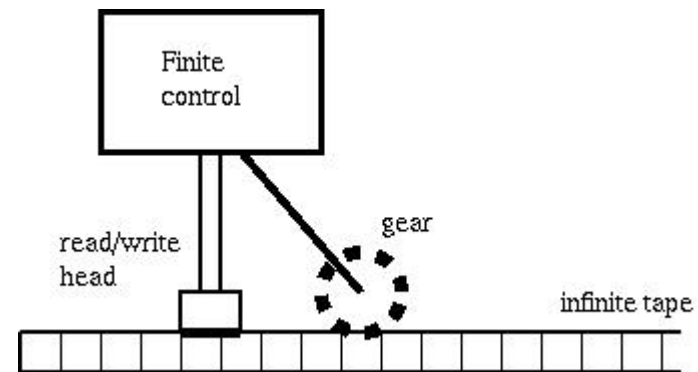
## 3. 「計算」とは何か？

### チューリングマシンモデルの構成要素

- 有限制御部
- 無限長のテープ  
読み書きヘッド

動作手順は以下の通り:

1. 読/書ヘッドが1文字読む
2. 文字の内容に応じて
  1. 文字を上書き
  2. ヘッドを右か左に一つずらす
3. 有限制御部の状態を変える。「受理」状態か「拒否」状態になっていなければステップ1に戻る。



# 3. Machine model & computability

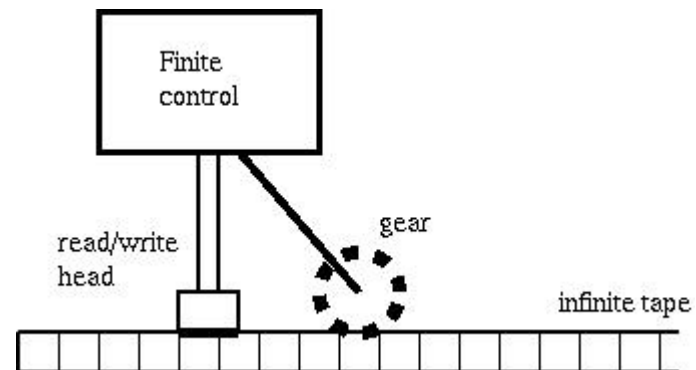
## 3. Studies on what is a computation.

Turing machine model consists of

- finite control
- infinitely long tape with read/write head

It moves as follows;

1. r/w head reads the letter
2. according to the letter,
  1. rewrite the letter
  2. move the head to the left or right neighbor
3. change the state of control and go to step 1 until it comes to “accept” state or “reject” state.

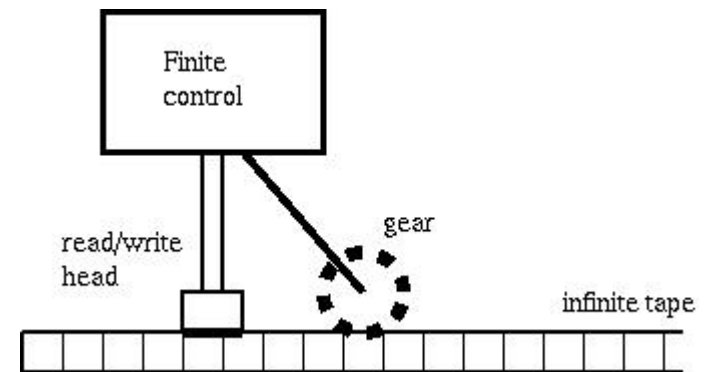


# 3. マシンモデルと計算可能性

## 3. 「計算」とは何か？

チューリングはチューリングマシンの**万能性**を証明

- どんな計算でも模倣できる
- 計算能力は昨今のスーパーコンピュータとも本質的に同じである! (計算時間を無視すれば)

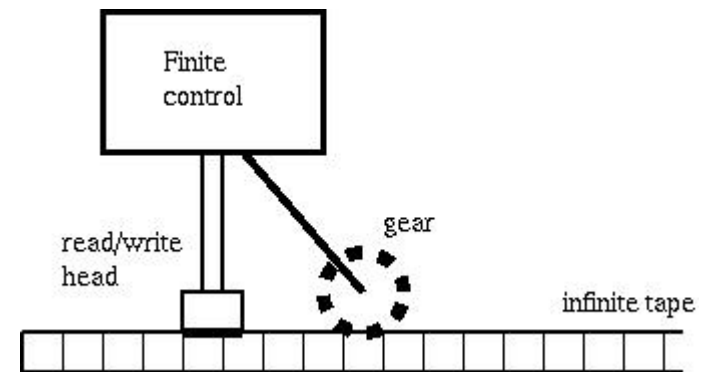


# 3. Machine model & computability

## 3. Studies on what is a computation.

Turing showed that Turing machine is *universal*

- it can simulate *any computation*
- it has the same computation power as recent supercomputers! (if you do not mind the *speed*)



# 3. マシンモデルと計算可能性

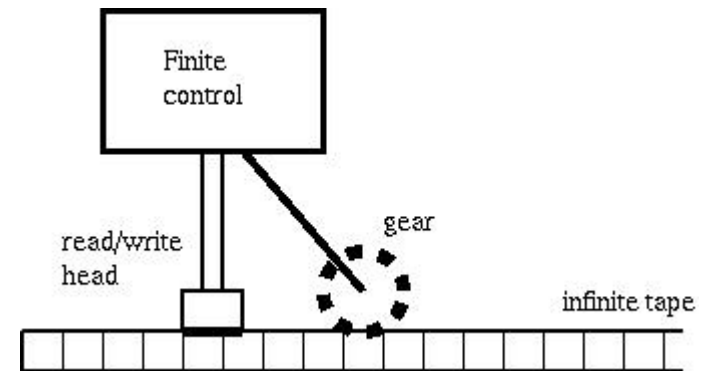
## 3. 「計算」とは何か？

チューリングはチューリングマシンの**万能性**を証明

例1.

テープ上の文字の種類が $k$  = 文字は2進;

それぞれの文字を2進文字列で符号化.



# 3. Machine model & computability

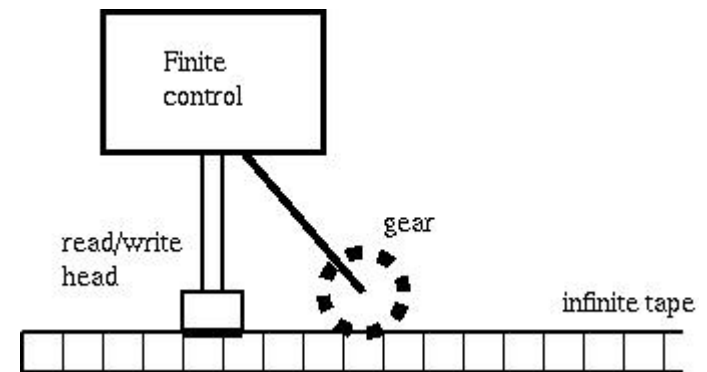
## 3. Studies on what is a computation.

Turing showed that Turing machine is *universal*

E.g. 1.

$k$  letters tape = binary tape;

each letter can be encoded by a binary string.



# 3. マシンモデルと計算可能性

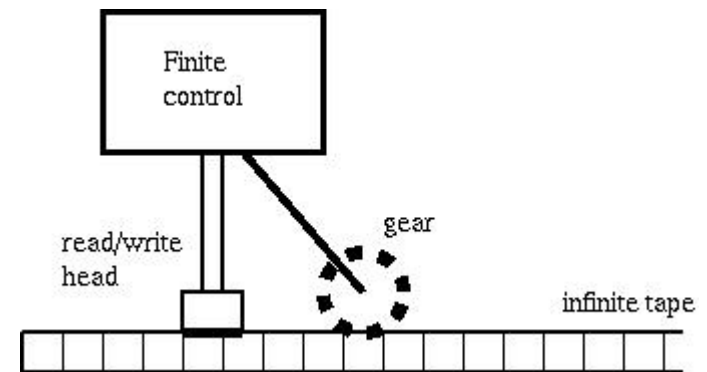
## 3. 「計算」とは何か？

チューリングはチューリングマシンの**万能性**を証明

例2.

テープは両側無限長 = テープは右側だけ無限長;

1. テープを中央で「折り返し」して重ねる
2. 4通りの文字に例1を適用
3. 有限状態部で「どちらのテープか」を管理



# 3. Machine model & computability

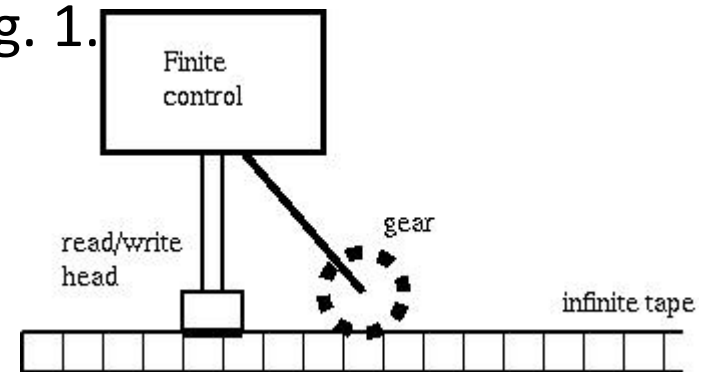
## 3. Studies on what is a computation.

Turing showed that Turing machine is *universal*

E.g. 2.

infinite *both* sides = infinite just right side;

1. “fold” the tape at the center
2. for the four letters, apply E.g. 1.
3. finite control has a state for “which tape?”





# 3. マシンモデルと計算可能性

## 3. 「計算」とは何か？

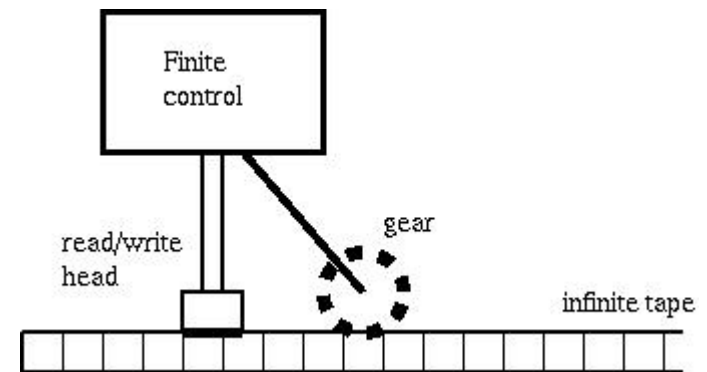
チューリングはチューリングマシンの**万能性**を証明

例3.

$k$ 本の(2進)テープ = 1本の2進テープ;

1.  $k$ 本のテープを1本のテープに「積み重ね」る
2.  $2^k$  種類の文字に例1を適用

各テープヘッドの位置は別途  
テープの左端に記録



# 3. Machine model & computability

## 3. Studies on what is a computation.

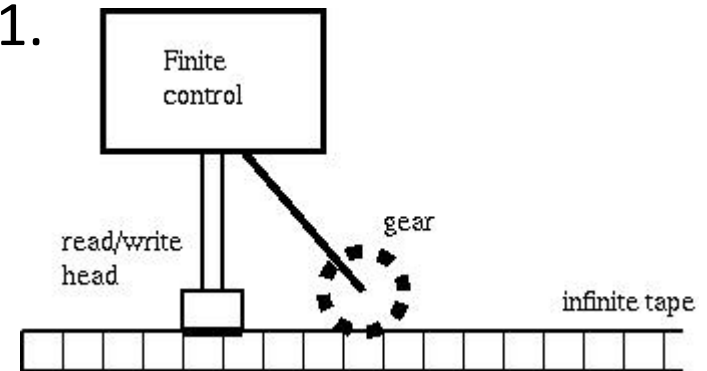
Turing showed that Turing machine is *universal*

E.g. 3.

$k$  (binary) tapes = 1 binary tape;

1. “stack” the  $k$  tapes onto a tape
2. for the  $2^k$  letters, apply E.g. 1.

(each head position is stored at left end)



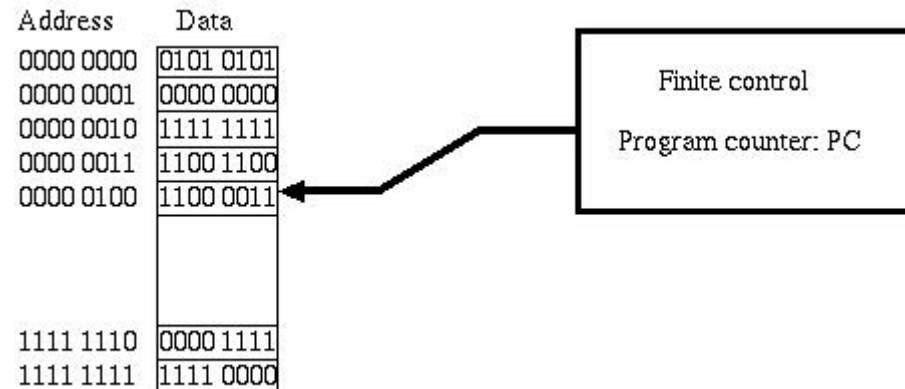
# 3. マシンモデルと計算可能性

## 3. 「計算」とは何か？

チューリングはチューリングマシンの**万能性**を証明

例3'.

$k$ テープ = いわゆる「フォン・ノイマン式」計算機  
= 普通の  $k$  ビットのコンピュータ



# 3. Machine model & computability

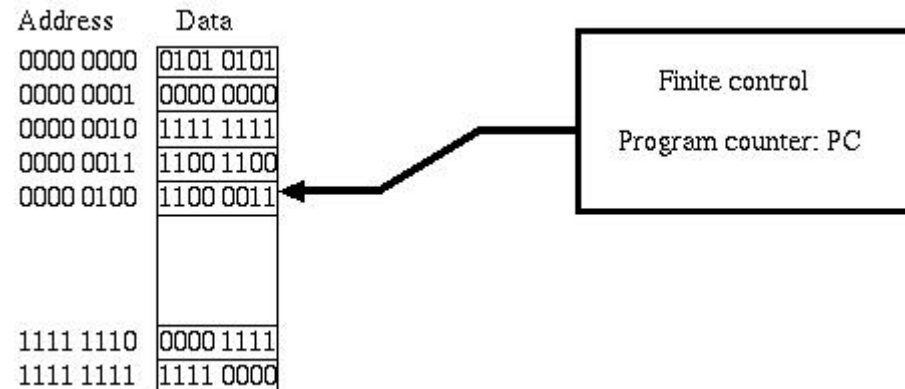
## 3. Studies on what is a computation.

Turing showed that Turing machine is *universal*

E.g. 3'.

$k$  tapes = so-called “von Neumann computer”

=  $k$  bit computer on your desktop



# 3. マシンモデルと計算可能性

## 3. 「計算」とは何か？

チューリングはチューリングマシンの万能性を証明

二つの重要なアイデア;

1. チューリングマシン  $T$  は以下の2つの内容をつないだ(とても長い)2進文字列で表現することができる.
  1. 有限制御部を書き下した文字列
  2. テープの内容を書き下した文字列
2. 万能チューリングマシン  $U$  は2進文字列で表現された任意のチューリングマシン  $T$  の動作を模倣できる(マシン  $U$  は一種の「シミュレータ」)

# 3. Machine model & computability

## 3. Studies on what is a computation.

Turing showed that Turing machine is *universal*

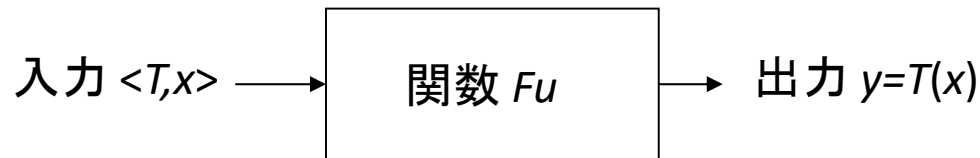
Two crucial ideas;

1. A Turing machine  $T$  can be encoded as a (loooong) binary string that consists of
  1. string that represents the finite control
  2. string that represents the contents on the tape
2. A universal Turing machine  $U$  simulates any Turing machine  $T$  represented in the binary string.  
(The machine  $U$  is a kind of “simulator”)

# 3. マシンモデルと計算可能性

## 3. 「計算」とは何か？

チューリングはチューリングマシンの**万能性**を証明  
「関数」 $F_U$  を使って示せば:



入力  $\langle T, x \rangle$ : 「 $T$ を符号化したもの」と「 $T$ への入力 $x$ 」を符号化したものの連結

出力  $T(x)$ : マシン $T$ に入力 $x$ を与えたときの出力

[定理] (チューリング1936)

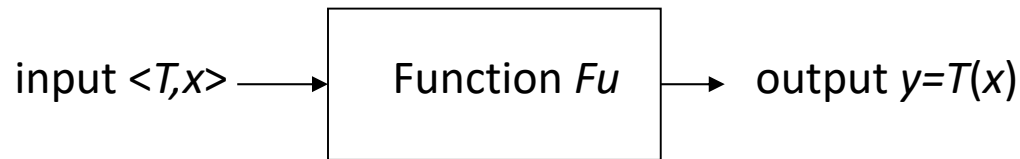
与えられた任意のチューリングマシン $T$ とそれへの入力 $x$ に対して,  
 $T(x)$ を計算(模倣)する(万能)チューリングマシン $U$ が存在する.

# 3. Machine model & computability

## 3. Studies on what is a computation.

Turing showed that Turing machine is *universal*

In the term of “function”  $F_U$ :



input  $\langle T, x \rangle$ : that represents “the code of  $T$ ” and “the code  $x$  of the input to  $T$ ”

output  $T(x)$ : the output of  $T$  with its input  $x$

[Theorem] (Turing 1936)

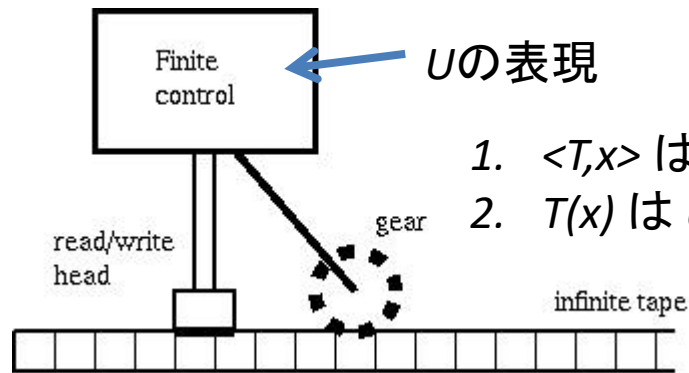
There is a (universal) Turing machine  $U$  such that it computes  $T(x)$  for any given Turing machine  $T$  and its input  $x$ .



# 3. マシンモデルと計算可能性

## 3. 「計算」とは何か？

チューリングはチューリングマシンの**万能性**を証明  
「チューリングマシン」モデルで表現すると:



1.  $\langle T, x \rangle$  は符号化されて最初にテープに書かれている
2.  $T(x)$  は  $U$  によって有限時間内にテープに書かれる  
( $T(x)$  が停止しないなら,  $U$  も同様.)

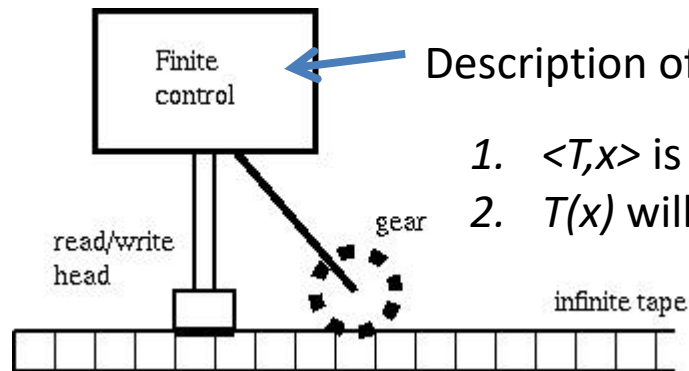
入力  $\langle T, x \rangle$ : 「 $T$ を符号化したもの」と「 $T$ への入力 $x$ 」を符号化したものの連結  
出力  $T(x)$ : マシン  $T$  に入力  $x$  を与えたときの出力

# 3. Machine model & computability

## 3. Studies on what is a computation.

Turing showed that Turing machine is *universal*

In the term of “Turing machine”:



1.  $\langle T, x \rangle$  is encoded and written on the tape at first
2.  $T(x)$  will be written on the tape by  $U$  in finite time  
(if  $T(x)$  does not halt, so is  $U$ .)

input  $\langle T, x \rangle$ : that represents “the code of  $T$ ” and “the code  $x$  of the input to  $T$ ”  
output  $T(x)$ : the output of  $T$  with its input  $x$

# 4. 計算不能性と対角線論法

## 4. 計算不能な問題

以下の問題を解くチューリングマシンは存在しない:

停止性判定問題HALT (停止するかどうかを決定する問題)

入力: チューリングマシン  $T$  と

それへの入力  $x$  を符号化した文字列  $\langle T, x \rangle$

出力:  $T$  に入力  $x$  を与えると、停止するか?

Yes:  $T(x)$  は(有限時間内に)停止する

No: 停止しない(無限ループ)

正確に言えば、停止性判定問題を解くチューリングマシン  $U'$  は存在しない。

...証明は「対角線論法」を用いて行う

# 4. Undecidability and Diagonalization

## 4. Undecidable problem

The following problem cannot be solved by any Turing machine:

Problem HALT(Problem of deciding halting)

input: a code  $\langle T, x \rangle$  of Turing machine  $T$  and an input  $x$

output:  $T$  will terminate for the input  $x$ ?

Yes: if  $T(x)$  terminates

No: otherwise.

Precisely, we can show that there is no Turing machine  $U'$  that computes the halting problem

...Proof is done by “diagonalization”