本講義のトピック

そのA:展開図とそこから折れる凸立体の研究

- 展開図と立体のとても悩ましい関係:最大の未解決問題
- 与えられた「展開図」を折って作れる(凸)「立体」をどうやって計算するか?
  - 数学的な特徴づけ/アルゴリズム/計算パワー

そのB:「折り」のアルゴリズムと計算量の関係

- 折り紙の基本操作　済
- 折り紙のアルゴリズムと計算量
  - 1次元の紙における効率のよい折り方(アルゴリズムと計算量)
    - 高速に折るアルゴリズム(折る回数を減らせるか?)
    - 「良い折り畳み状態」を評価する指標のモデル
  - 1次元の紙における計算不能性(計算の理論)
    - 計算モデル

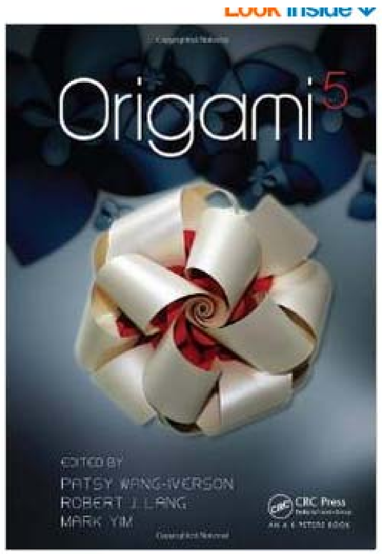
そのB:「折り」のアルゴリズムと計算量の関係

5. 時間計算量
   - “Folding complexity”入門
     - 理論上、世界最速のジャバラ折りアルゴリズム

6. 領域計算量(？)
   - 切手折り問題
   - 折り目幅最小化問題
     - NP完全問題、FPTアルゴリズムなど
     - これも予想以上にコンピュータサイエンス！

7. (折り紙における決定不能問題)
   - 対角線論法と不完全性定理

切手折り問題



上原隆平（うえはらりゅうへい）
北陸先端科学技術大学院大学　情報科学研究科
Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST)
uehara@jaist.ac.jp
http://www.jaist.ac.jp/~uehara

主要な論文

Ryuhei Uehara, Stamp foldings with a given mountain-valley assignment in *ORIGAMI*^{5}, pp. 585-597, CRC Press, 2011.

一般化じゃばら折り問題

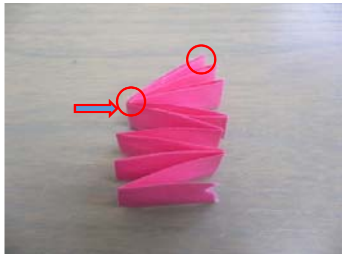
- 入力：等間隔の山折りと谷折りの列
- 出力：入力を実現する平坦な折りたたみ状態

[定理] どんな入力に対しても、平坦な折りたたみ状態が存在する。

[証明(?)] 端から一つずつ折っていけばよい。

[疑問] 「良い平坦折り状態」とは？？

例：山谷山谷山谷山山谷山谷山谷山



左側の一つの折り目に
右側を全部入れる

× 良くない！！

どの折り目も2枚以下の
紙しか挟まっていない

○ 良い！！

- 平坦折りの「良さ」

[疑問] 「良い平坦折り状態」とは？？

ある折り目の幅
＝その折り目に挟まった
他の紙の枚数

「折り目に挟まった紙」が少ないほど「良い」！

- 厚みがあっても精度が確保されやすい
- バランスがよさそう
- 「時間」と「伸び」はトレードオフがある
  （計算機モデルにおける「時間」「領域」に似ている）

良さの指標

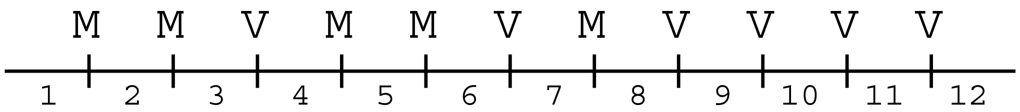
1. 折り目の幅の最大値
2. 折り目の幅の平均値
3. 折り目の幅の総和

指標[2]と[3]は本質的に同じ:
平均値＝(総和/折り目の数)

指標による結果の違い

答えが自明ではない例

入力: 山山谷山山谷山谷谷谷谷

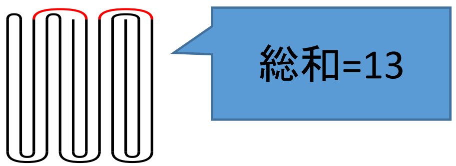


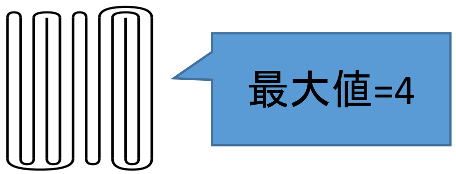
折りたたみ方: 正当な平坦折りの個数 : 100通り

解答: 指標によって結果が違う(しかも両方唯一解) :

- 最大値が最小値3の唯一解
  [5|4|3|6|7|1|2|8|10|12|11|9]

- 総和が最小値11の唯一解
  [5|4|3|1|2|6|7|8|10|12|11|9]



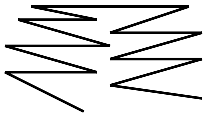


折り目幅最小化問題

入力: 長さ n+1 の紙と[山/谷]の長さ n の文字列 s
出力: s に従って平坦に折られた紙
目的: 折り目幅の少ない「良い」平坦折り状態

- わかっていること;
  1. 2種類の最適化問題の解答は違う場合がある
  2. パターンがじゃばら折りである⇔
     伸びが0である⇔
     折り方が一意的
  3. 指数関数的な組合せをもつ入力例がある

[証明]　余白がせますぎて書けない



[例]　山谷山谷山谷…山谷山山谷山谷山谷…山谷山

折り目幅最小化問題

当時解けなかった問題:

- NP完全(後年解決！)
- 「幅≦ k 」としたら多項式時間で解けるか?
  (これも後年解決！)
- もっとも組合せの多いパターンは?（未解決）

あとで紹介

このとき解けた問題:

1. ランダムなパターンの折りたたみ方の期待値
2. （「単純折りモデル」の万能性）

折り目幅最小化問題

このころ解けた問題:

1. ランダムなパターンの折りたたみ方の期待値
   - 長さ n のランダムな山谷パターンに対する折りたたみ方 $f(n)$ が相対に小さければ、力技で解けるかもしれない…

   …という考えは甘かった

   - 実験的: $f(n)=\Theta(1.65^n)$
   - 理論的: $f(n)=\Omega(1.53^n)$ かつ $f(n)=O(2^n)$

   …単純な全数チェックは望みがない

2. (「単純折りモデル」の万能性)

折り目幅最小化問題

1. ランダムなパターンの折りたたみ方の期待値

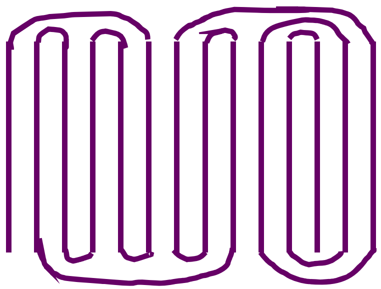
- 長さ n の紙を（折り目は考えずに）長さ1になるまで折りたたむ方法を $F(n)$ とすると、$f(n)=F(n)/2^n$
- $F(n)=\Omega(3.06^n)$ かつ $F(n)=O(4^n)$ を示せばよい。

後日談：この関数$F(n)$は有名な未解決問題
「切手折り問題(stamp folding)」として知られており，
既存の上下界は $\underline{2^n \leqq F(n)} \leqq 4^n$ であった！

切手折り問題

$F(n)$の上界: $F(n)=O(4^n)$

[証明] 満たすべき条件：奇数折り目と偶数折り目がそれぞれ入れ子状になっていなければならない



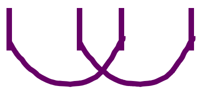
入れ子　(()())(()(()))

$n/2$組の()の組合せ
＝カタラン数$C_{n/2}$

×

入れ子　・(()()())((・))

$n/2$組の()の組合せ
＝カタラン数$C_{n/2}$



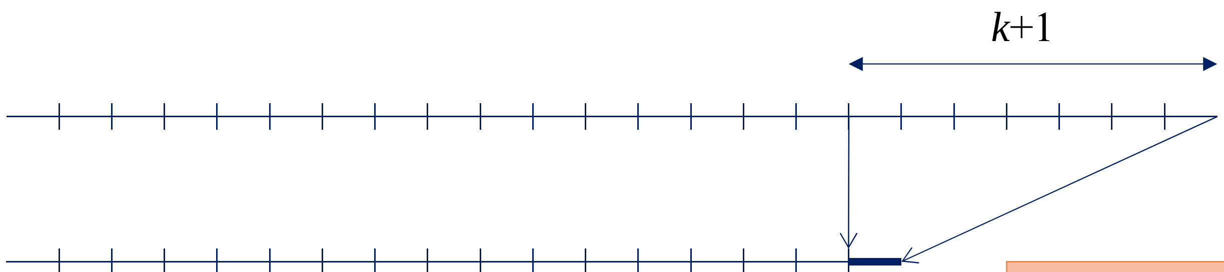
ダメ！

連結性は考慮していない

切手折り問題

$F(n)$の下界: $F(n)=\Omega(3.07^n)$

[証明]「紙の最後の k+1 長を折ってのり付け」を考える;

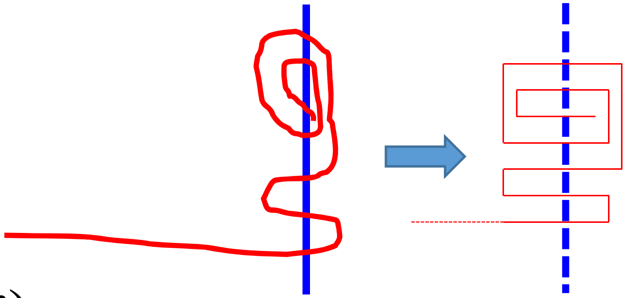


- $F(n)$: 長さ n+1 の紙の折りたたみ方
- $g(k)$: 長さ k+1 の紙の折りたたみ方
  ただし左端点は覆われない

n は<u>変数</u>だけど
k は<u>定数</u>

とすると次を得る: $$f(n) \geq (g(k))^{\frac{n}{k-1}} = \left(g(k)^{1/(k-1)}\right)^n$$

切手折り問題



$F(n)$の下界: $F(n)=\Omega(3.07^n)$

[証明]「紙の最後の $k+1$ 長を折ってのり付け」を考える;

- $g(k)$: 長さ $k+1$ の紙の折りたたみ方(ただし左端点は覆われない)

とすると

$g(k)$="the number of ways a semi-infinite directed curve can cross a straight line k times"

by The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS;A000682)

上記のデータベースによると、$g(43)=830776205506531894760$.

よって

$$f(n) \geq (g(k))^{\frac{n}{k-1}} = \left(g(k)^{1/(k-1)}\right)^n$$

に代入すればOK!

切手折り問題の拡張

２次元への拡張～地図折り問題

入力：2次元の山折り/谷折りのパターン

出力：1×1に「折り畳んだ状態」が存在するか？

- m×nの地図折り問題の困難性は未解決
- 2×nの地図折り問題の多項式時間アルゴリズムは[Morgan 2012]で与えられたが… O(n^9)時間
- すごく難しいパズル：