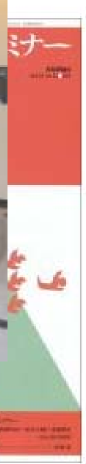
JAISTギャラリーにパズルが展示

I482F
12回目：

数学セミナー2013年12月号
（11月12日発売）
は「P≠NP予想最前線特集号」！

数学セミナー

2013年12月　通巻 626号


クリックで拡大

特集 1

P≠NP予想最前線

雑誌コード：05423　発刊日：2013.11.12
毎月12日発売　在庫あり

定価：税込 **1,100**円（本体価格 1,048円）

- 定期購読のお申込
- バックナンバー一覧

在庫があります。ショッピングカートがご利用になれます。　カートに入れる

内容紹介

計算量理論はもとより、現代数学においても重要な未解決問題であるP≠NP予想。その解決に向けて近年さまざまなアプローチが展開されている。今回は、P≠NP予想やそれに関連する計算の複雑さの解析における新たな潮流を予感させる手法を紹介する。

目　次

■特集＝P≠NP予想最前線

計算量のクラス

- 集合・問題・言語：
  - アルファベットΣ（典型的には$\Sigma=\{0,1\}$）に対して、全体集合
    $\Sigma^*=\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \ldots\}$
    の部分集合のことを<u>言語</u>という。
  - 言語Lに対して、
    与えられた任意のxに対してLに属するかどうか
    を決める問題をその言語の<u>認識問題</u>という。

例12.1：

$L_1=\{0, 10, 100, 110, 1000, 1010, 1100, 1110, \ldots\}$
（L_1は偶数の自然数の2進数表記）

$L_2=\{10, 11, 101, 111, 1011, 1101, 10001, \ldots\}$
（L_2は素数の2進数表記）

プログラミング言語モデル

- ここでは
  - プログラミング言語は普通の手続き型言語(たとえばC)
    - 変数
    - 代入文
    - 条件判断(if 文)
    - 制御命令(goto 文)
  - データやプログラムは妥当なコード化がされている
    - アルファベットは$\Sigma=\{0,1\}$
    - 数値データは2進数表現
    - 文字列はASCIIコード

プログラムの実行時間

- あるプログラム P の実行時間は、入力の長さ n に対する関数 $f(n)$ で測る。ただし
  - $f(n)$ は
    - 入力の長さが**高々 n** の**任意の入力** x に対する
    - $P(x)$ の計算時間の**上界**

  を与える関数である。

任意の入力：その長さまでの最悪の入力を考える。

上界：過大評価している場合もある

高々n：nの増加に対して非減少な単調関数としてよい。

計算量のクラス

- 代表的な(=この授業で出てくる)クラス

定義12.1: クラスP
言語 L がクラスPに入る ⇔
以下を満たすプログラム P と多項式 f が存在:
任意の $x \in \Sigma^*$ に対して $P(x)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く

定義12.2: クラスEXP
言語 L がクラスEXPに入る ⇔
以下を満たすプログラム P と指数関数 f が存在:
任意の $x \in \Sigma^*$ に対して $P(x)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く

クラスEXPの中の最上位の問題は「手に負えない」

定義12.3: クラスNP
集合 L がクラスNPに入る ⇔
以下を満たすプログラム P と多項式 f と多項式 q が存在:
任意の $x \in \Sigma^*$ に対して
- $\underline{x} \in L$ ならば $\exists w \in \Sigma^*$ $(|w| \leqq q(|x|))$ に対して $P(x,w)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く
- $x \notin L$ ならばそのような w は存在しない

計算量のクラス

- 代表的な(＝この授業で出てくる)クラス

定義12.3:クラスNP
集合 L がクラスNPに入る ⇔
以下を満たすプログラム P と多項式 f と多項式 q が存在:
任意の $x \in \Sigma^*$ に対して
- $\underline{x} \in L$ ならば $\exists w \in \Sigma^*$ $(|w| \leqq q(|x|))$ に対して $P(x,w)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く
- $x \notin L$ ならばそのような w は存在しない

補注:各 $x \in \Sigma^*$ に対して，上記を満たす $w_x \in \Sigma^*$ を x の(多項式長の)証拠という.
以下では,

$$\exists w \in \Sigma^* : |w| \leq q(|x|) \;\Rightarrow\; \exists_q w$$

と略記.

クラスNPとは「入力サイズの多項式長の証拠が与えられたとき,
これが問題の条件を満たすかどうかを多項式時間で判定できる」
という性質をもつクラス

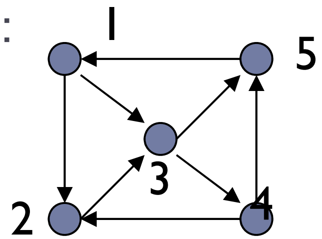
補足:NP=**N**ondeterministic **P**olynomial

NP問題の例

スターリングの近似式 : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

- ハミルトン閉路問題(DHAM)
  - 入力 : 有向グラフD(頂点は$1 \sim n$で番号付けされているとする)
  - 出力 : すべての頂点をちょうど一度づつ訪れる閉路はあるか?

例12.2 :



頂点を訪れる順序は$1 \sim n$の順列
<1,2,3,4,5>: ハミルトン閉路
<1,2,3,5,4>: ハミルトン閉路ではない
<1,4,3,2,5>: ハミルトン閉路ではない

全部で約 $n! \sim 2^{n \log n}$ 通りなので、素朴に全部試すと指数時間かかる。

プログラム P :
[入力] グラフ D と $1 \sim n$ の順列 p
[出力] p の順に D の頂点を訪れて
ハミルトン閉路になっていればYes、そうでなければNo

- プログラム P は $|D|, |p|$ に対する多項式時間アルゴリズム
- $D \in$DHAMならば、$\exists p$が「Dの証拠」の条件を満たす
- $D \notin$DHAMならば、どんなpも「Dの証拠」の条件を満たすことはできない

NP集合であることの意味とは…

「計算機で解きたい問題」
としては自然な状況

- （とても）直観的な意味：与えられた問題が…
  - 解答を教えてもらえると、自分で多項式時間で確かめられる
  - 自分で解答を見つけるのは指数時間かかりそうに見える
    （本当に指数時間かかるかどうかは100万ドルの賞金問題）

ミレニアム問題
P≠NP予想

- もう少し形式的には

多項式時間プログラムPを用いて，$x \in L$? を次のように判定できる．

for each $w \in \Sigma^{\leq q(|x|)}$ do
  if $\mathrm{P}(x, w)$=“yes” then accept end-if
end-for;
reject;

長さが$q(|x|)$以下の文字列をすべて列挙して調べれば，YesかNoかを判定できる．
ただ，そのような文字列は約 $2^{q(|x|)}$ 個（指数関数）存在することに注意．

上記の計算方式で認識できる集合をNP集合と考えてよい．
ここから P⊆NP⊆EXP という包含関係もわかる。

NP問題の例

・命題論理式充足性問題(SAT)
入力 : n変数の命題論理式F
質問 : Fを真にするTrue/Falseの割り当てがあるか？

・ナップサック問題(KNAP)
入力 : 自然数の組$< a_1, a_2, \ldots, a_n, b >$
質問 : $\sum_{i \in S} a_i = b$ となる添字の集合 $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ があるか？

・箱詰め問題(BIN)
入力 : 自然数の組$< a_1, a_2, \ldots, a_n, b, k >$
質問 : 添字の集合$U=\{1, \ldots, n\}$を$U_1, \ldots, U_k$のk個に分割し,
各jで $\sum_{i \in U_j} a_i \leq b$ とすることは可能か？

・頂点被覆問題(VC)
入力 : 無向グラフGと自然数kの組$< G, k >$
質問 : Gにk頂点の頂点被覆が存在するか？

頂点被覆 S:
どの辺 (u,v) も
u, v の一方は
S に含まれる

多項式時間還元可能性

B を解くプログラムがあれば
それで A を解くことができる

定義12.4:
AとBを任意の集合とする.
(1) 関数 h: $A \rightarrow B$: 多項式時間還元(polynomial-time reduction)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(a) } h \text{ は} \Sigma^* \text{から} \Sigma^* \text{への全域的関数} \\ \text{(b) } \forall x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B] \\ \text{(c) } h \text{ は多項式時間計算可能.} \end{cases}$$

(2) AからBへの多項式時間還元が存在するとき,
AはBへ多項式時間還元可能という(polynomial time reducible).
このとき，次のように書く: $\boxed{A \leq_m^P B}$

直観的な意味:

$A \leq_m^P B$ とすると多項式時間の範囲内では,「Aの難しさ」$\leq$「Bの難しさ」

多項式時間還元の基本性質

定理:12.1 $A \leq_m^P B$ のとき,

(1) $B \in$ P → $A \in$ P.
(2) $B \in$ NP → $A \in$ NP.
(3) $B \in$ EXP → $A \in$ EXP.

例12.3:

ONE＝$\{1\}$と定義するとき，クラスPのすべての集合Lについて $L \leq_m^P$ ONE が成り立つ.

(∵)

$$h(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \in L\text{のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

と定義すると,

(a) hはΣ^*からΣ^*への全域的関数.
(b) $x \in \Sigma^* [x \in L \leftrightarrow h(x) \in \mathrm{ONE}]$
(c) hは多項式時間計算可能（$L \in$ P→$x \in L$の判定も多項式時間内）

多項式時間還元における同値関係

定理12.2: A, B, C: 任意の集合

(1) $A \leq_m^P A$

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P C \rightarrow A \leq_m^P C$

定義12.5 : $A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P A$

$\equiv_m^P$ は同値関係

多項式時間還元性のもとで同値な問題群

命題論理式の充足可能性問題の間の関係

2SAT　（命題論理式充足性問題：二和積形式）
3SAT　（命題論理式充足性問題：三和積形式）
SAT　（命題論理式充足性問題）
ExSAT　（拡張命題論理式充足性問題）

$$2\mathrm{SAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT}$$

- 高々k個…自明
- ちょうどk個…
  - 同じリテラルを使ってよいなら簡単。
  - だめなら…考えてみよう！

同様に,

$$3\mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$$

$$2\mathrm{SAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$$

よってここで

$$\mathrm{ExSAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT}$$

が示せれば,

$$3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$$

となる.

ExSATから3SATへの還元

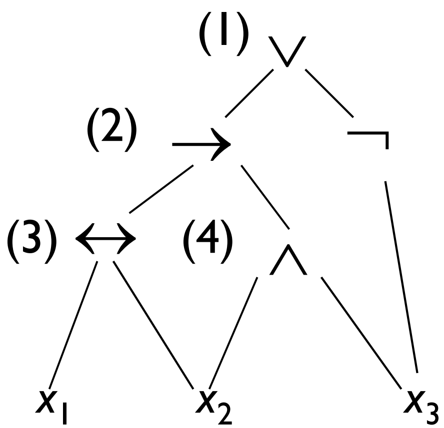
$$E_1(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \rightarrow [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$

$$F_1(x_1, x_2, x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]]$$
$$\wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

F_1の構成方法：E_1の計算木をボトムアップで計算する方法を模倣

このとき，[E_1が充足可能] $\leftrightarrow$ [F_1が充足可能]

F_1は三和積形式に直しやすい形になっている．



$$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$$
$$(2) V_2 \equiv [V_3 \rightarrow V_4]$$
$$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$$
$$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$$

F_1を構成するために，$V_i \rightarrow$ U_iとし，V_iの定義式を∧で結ぶ

ExSATから3SATへの還元

F_1 の構成方法より,
(1)各U_i の値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としない限り，F_1は真にはならない.
(2)各U_iの値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としたとき，$F_1 = E_1$

上の性質が成り立つことは，帰納法を用いるなどして証明可能.
証明は省略.

三和積形式への変換

次の関係を使って展開する:

$$a \to b = \neg a \vee b$$
$$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a) = (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$$

例:

$$\begin{aligned}
U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg[U_2 \vee \neg x_2]] \\
&= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\
&= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\
&= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2]
\end{aligned}$$

他も同様に展開して整理すると、三和積形式に変形できる.
よって，すべて三和積形式に変形できることがわかる.

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の定義と基本的な性質

定義12.5:

計算量クラスXに対し，集合 A が次の条件を満たすとき，
A は($\leq_m^P$ の下で) X-困難という.

(a) $\forall L \in X\ [L \leq_m^P A]$

クラスXのどの問題と比べても同程度には難しい

定義12.6:

計算量クラスXに対し，X-困難集合 A が $A \in X$ を満たすとき，
A は($\leq_m^P$ の下で) X-完全という.

クラスXの中でもっとも難しい

例12.4: クラスNPの完全集合の例

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN,VCなど

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の定義と基本的な性質

定理12.3: 任意のX-困難集合(含:X-完全集合)Aに対し,

(1) $A \in \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq \mathrm{P}$ 　　対偶は $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{P} \rightarrow A \notin \mathrm{P}$

(2) $A \in \mathrm{NP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq \mathrm{NP}$ 　　対偶は $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{NP} \rightarrow A \notin \mathrm{NP}$

(3) $A \in \mathrm{EXP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq \mathrm{EXP}$ 　　対偶は $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{EXP} \rightarrow A \notin \mathrm{EXP}$

証明:

(1) Bを任意のX集合とすると, AはX-困難だから, $B \leq_m^P A$

　一方, $A \in \mathrm{P}$の仮定より, $B \in \mathrm{P}$

　(2), (3), (4)も同様

定理12.3の意味(クラスNP)

　AをNP-完全集合とする.

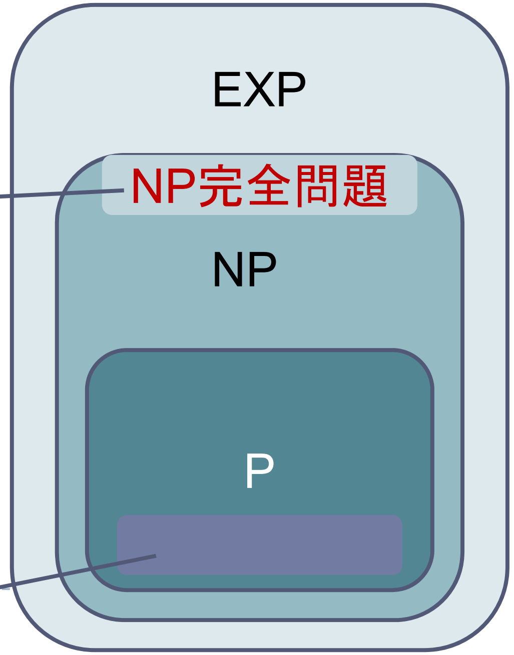
　定理12.3(1)の対偶より,

　　$\mathrm{NP} \neq \mathrm{P} \rightarrow A \notin \mathrm{P}$

　よってNP-完全集合はP≠NPである限り,

　多項式時間では認識できない.

問題のサイズが大きくなると手に負えない問題



現実的な時間で解ける問題

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の定義と基本的な性質

定理12.4: A: 任意のX-完全集合
すべての集合Bに対し,
(1) $A \le_m^P B$ → BはX-困難.
(2) $A \le_m^P B \wedge B \in X$ → BはX-完全.

完全集合が1つでも
見つかれば、そこから
芋づる式に困難性や
完全性を示すことができる。

証明:

定義12.5より, $\forall L \in \mathrm{C}[L \le_m^P A]$

定理12.2(2)より, $L \le_m^P A \wedge A \le_m^P B \to L \le_m^P B$

したがって, $\forall L \in \mathrm{C}[L \le_m^P B]$

すなわち, BはX-困難.

完全集合第1号
Cookの定理:3SATはNP完全集合
(証明: Turing Machine の計算プロセスを
すべて論理式で記述しなおす!!)

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

- 困難性と完全性の証明方法

(NP)完全性の証明方法
(I) 定義通りに[すべての*L*]について示す
(II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: Cookの定理(SATでTMを模倣)

3SATなどは、
形式が一様なので
扱いやすい

基本的には…
1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する
→<u>とても大変</u>(手間がかかる)

(II)の例: 世の中のNP完全性の証明のほとんど

DHAMは一般のグラフ上でNP完全

DHAMは平面グラフに限定してもNP完全
DHAMは「頂点の次数＝3」に限定してもNP完全
DHAMは2部グラフに限定してもNP完全…

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の証明

定理12.5: 以下にあげる集合はすべてNP-完全
(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
(2) DHAM, VC (3SATからの還元)
(3) KNAP, BIN (3SATからの還元とKNAP $\leq_m^P$ BIN)

(II) NP完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:
1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でもNP完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

定理12.5(2) : VC は NP 完全問題

[証明] VC ∈ NP なので、3SAT $\leq_m^P$ VC であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が与えられたとする。
Fから以下の条件を満たすグラフと自然数の組$\langle G, k\rangle$が
多項式時間で構成できることを示す:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

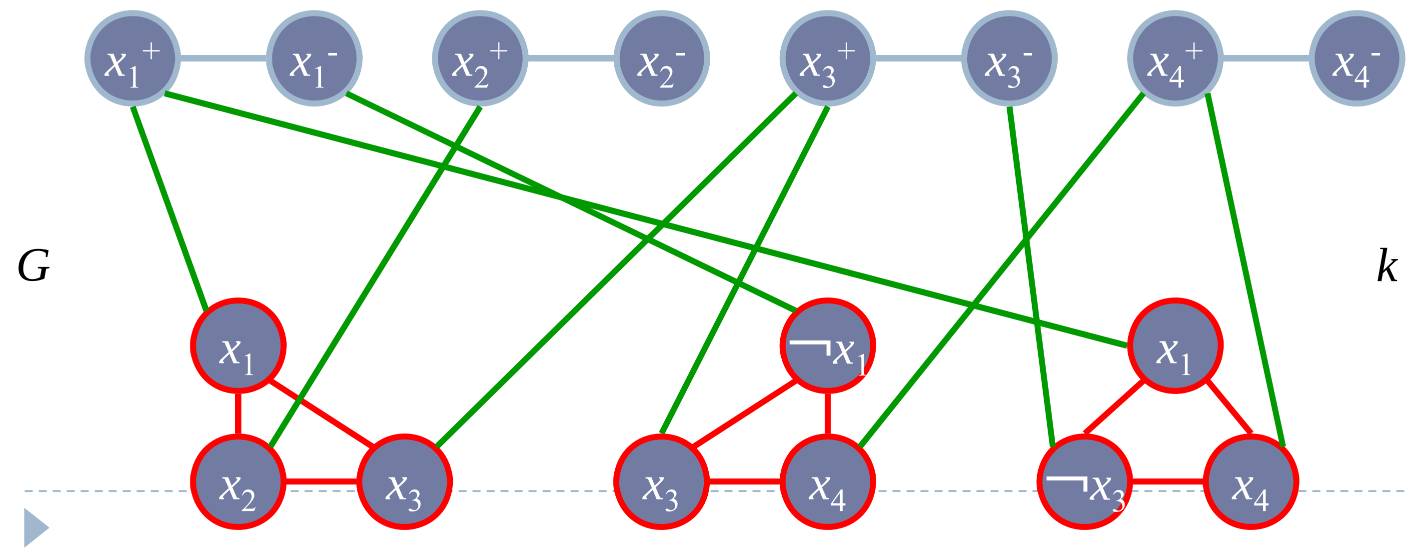
1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1}\vee l_{i2}\vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺$(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})$を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^-と、辺(x_i^+, x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺$(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})$を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1}, x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

Gの構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能 。したがって以下を示せばよい:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

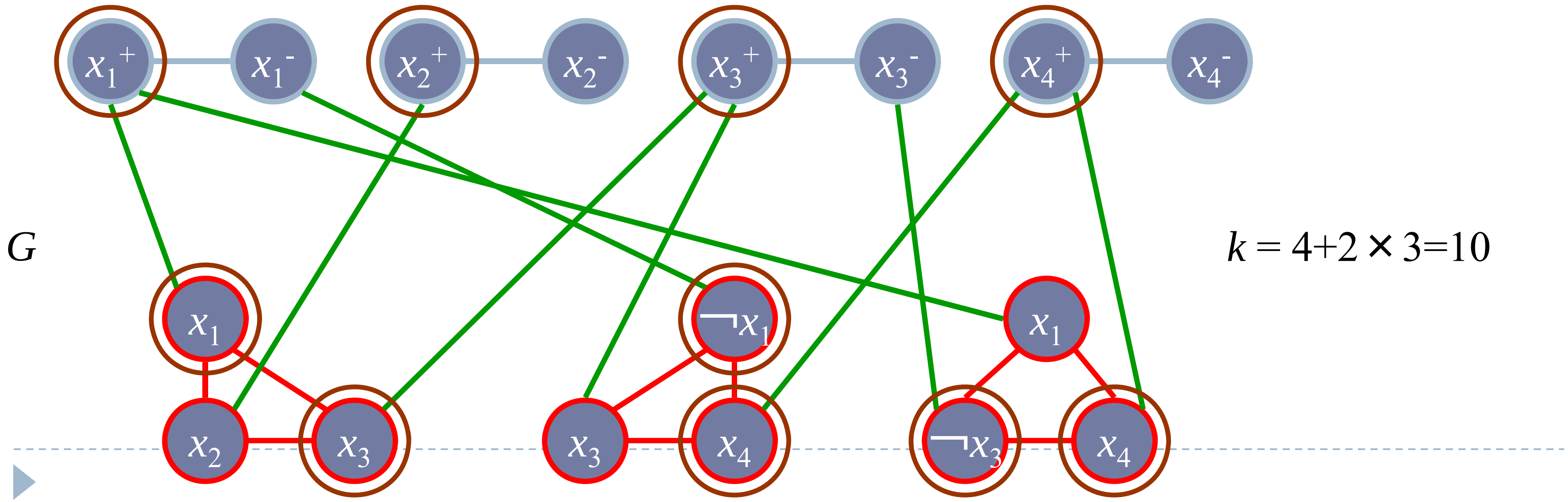
観察:

Gの構成から任意の頂点被覆Sは

- x_i^+, x_i^-のどちらかを含む
- C_jの3頂点中、最低2つ含む

よって $|S| \geqq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

Fを1にする割当が存在する⇒Gがサイズkの頂点被覆を持つ

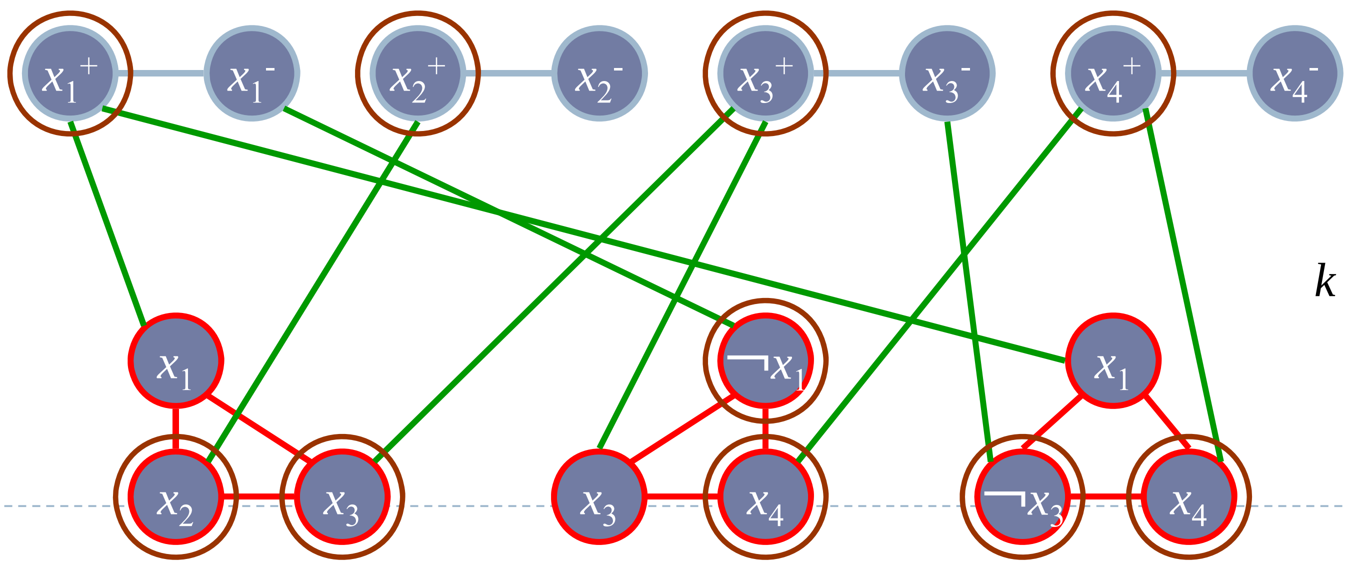
1. それぞれの変数 x_i が $\begin{cases} x_i=1\text{なら } x_i^{+}\text{を}S\text{に入れる} \\ x_i=0\text{なら } x_i^{-}\text{を}S\text{に入れる} \end{cases}$

2. それぞれの項$C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1},x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2},l_{i3})を S に入れる。

⇒ **観察** より、Sはサイズkの頂点被覆になる。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

Gがサイズkの頂点被覆を持つ$\Rightarrow$ Fを1にする割当が存在する

1. **観察** より、被覆Sは項から$2m$個、変数からn個の頂点を含む。

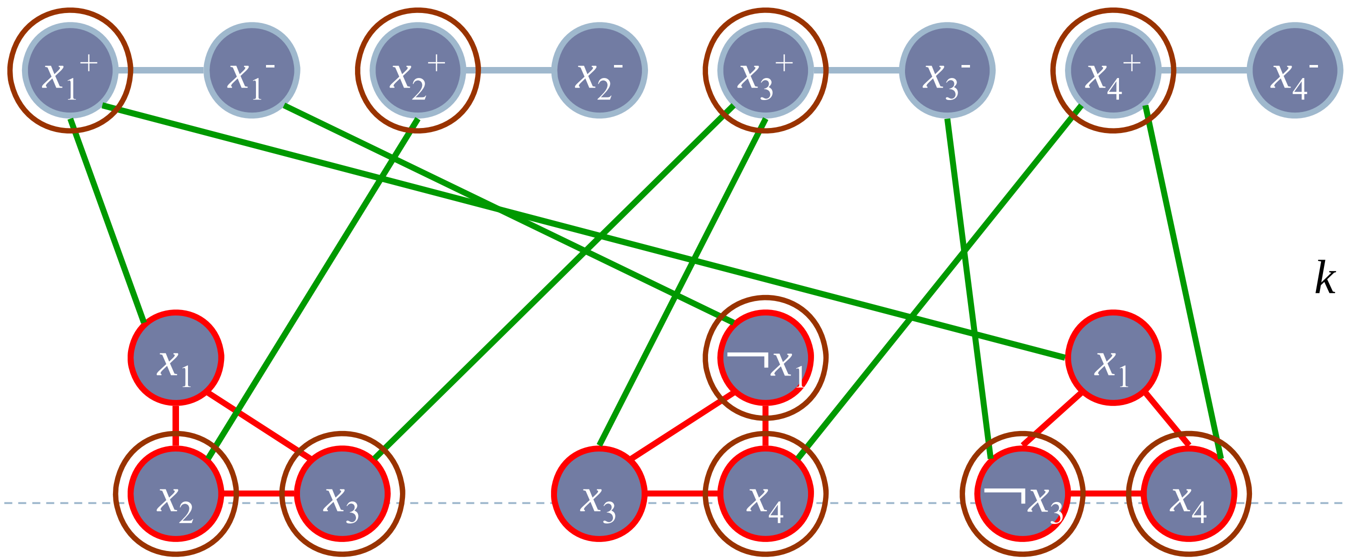
2. さらに各変数x_iについてはx_i^+かx_i^-の一方しか、
各項C_jについてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。

3. よって各項C_jはSに含まれないリテラルl_iを含むが、
これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

$\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} x_i^+\text{が}S\text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^-\text{が}S\text{に含まれるなら } x_i=0 \end{array} \right\}$ という割当はFを充足する。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G

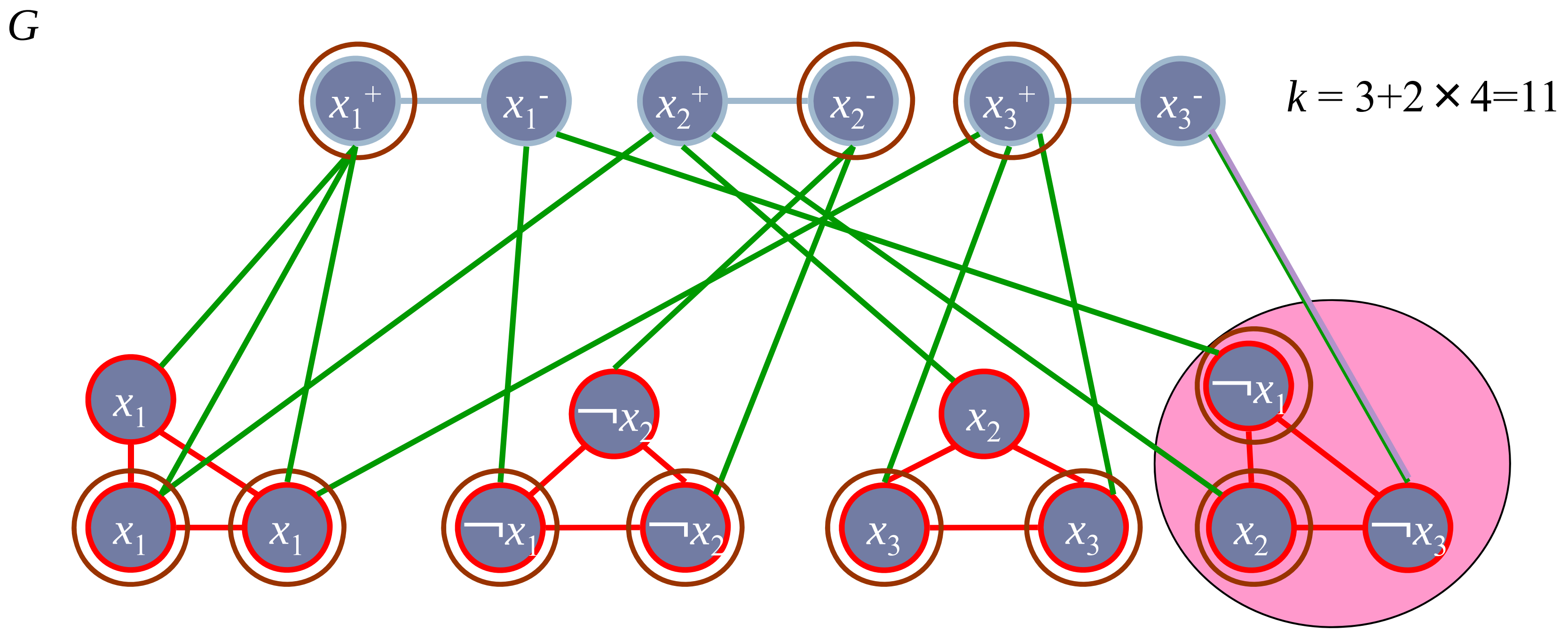


$k = 4+2\times 3=10$

QED.

充足できない例:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \\ \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$



充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは k+1以上になる。

定理12.6: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は NP 完全問題

次数: 頂点に付随する辺の本数

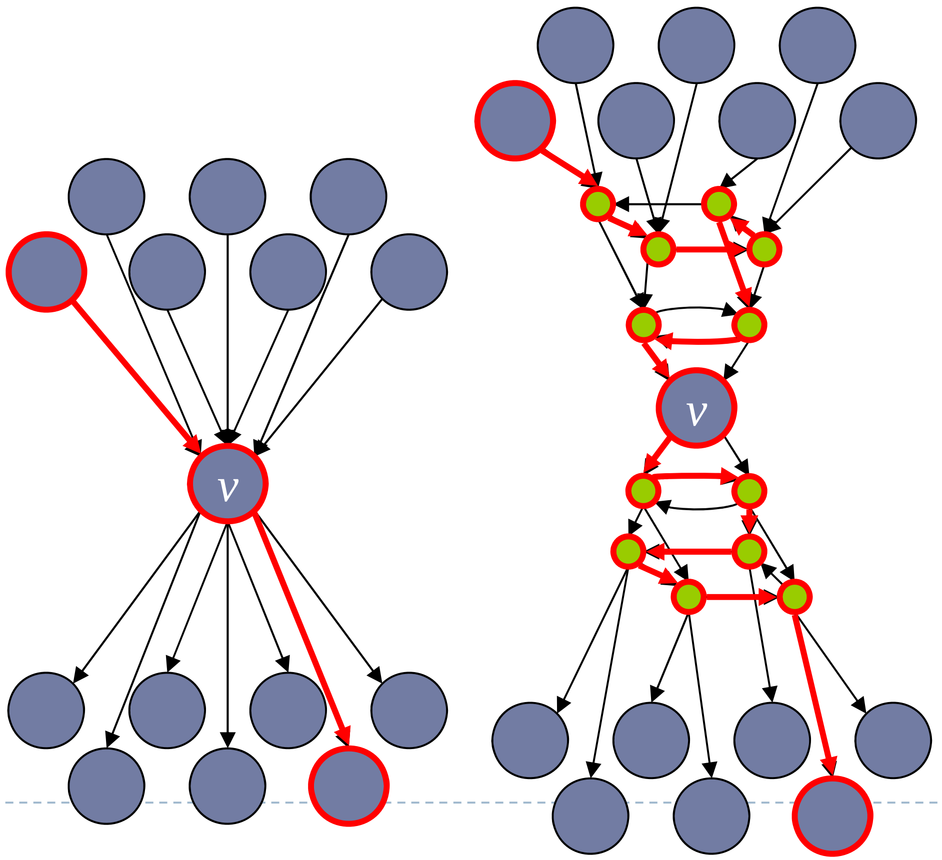
[証明] (上記の問題を$\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$と略記する)

$\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$ がNPに属するのは、DHAMがNPに属することから自明。したがって完全性を示せばよい。
$\mathrm{DHAM} \leq_m^P \mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合)と(出ていく辺集合)を右図の`gadget'で置き換える

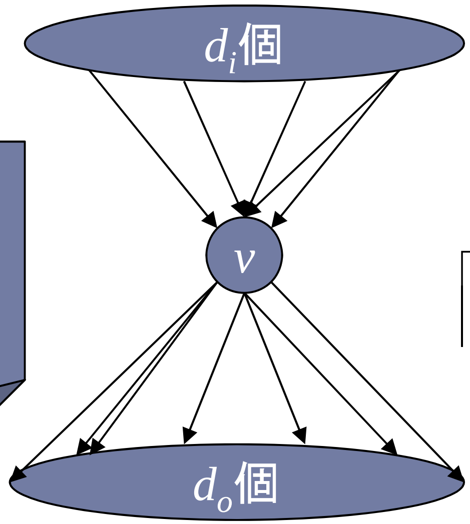
左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。

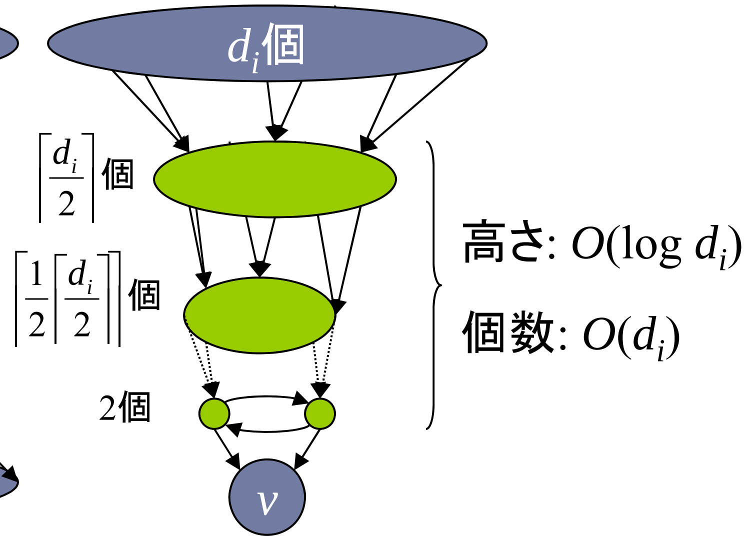


定理12.6: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は NP 完全問題

アイデア:

ポイント:
- 各閉路は上から下
- 各頂点は次数≦5





[証明(概要)]

与えられたグラフGの次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

1. 元のグラフGがn頂点m辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフG'は$O(n+m)$頂点 $O(m)$辺となる。したがって上記の還元はGの大きさの多項式時間で可能。
2. またG'のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. Gがハミルトン閉路をもつ⇔G'がハミルトン閉路を持つ

QED.

Addition (おまけ)

多くの「難しく」て「自然」な問題は
- 多項式時間で解けるか、さもなくば
- NP困難

- R. Uehara, S. Iwata:
  Generalized Hi-Q is NP-complete,
  The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- P. Zhang, H. Sheng, R. Uehara:
  A Double Classification Tree Search Algorithm for Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- R. Uehara, S. Teramoto:
  Computational Complexity of a Pop-up Book,
  4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006.
- E. Demaine, M. Demaine, R. Uehara, T. UNO, Y. UNO:
  UNO is hard, even for a single player,
  Theoretical Computer Science, accepted, 2013.
- 『ゲームとパズルの計算量』ロバート・A・ハーン，エリック・D・ドメイン著，上原隆平訳，近代科学社，2011年8月.

参考文献

- NP完全性にまつわる話は「計算量の理論」と呼ばれる分野
- JAIST の講義ではI216「計算の理論と離散数学」の中の1/2くらいで扱っている
  - 「計算理論の基礎」シプサ著、太田・田中・阿部・植田・藤岡・渡辺訳、共立出版
  - 「オートマトン・言語理論・計算論」ホップクロフト・ウルマン・モトワニ著、野崎・町田・高橋・山崎訳、サイエンス社
  - 「計算可能性・計算の複雑さ入門」渡辺治著、近代科学社