I216 Computational Complexity & Discrete Mathematics Report

2010 Term 2-1 (October-November)
Ryuhei Uehara (uehara@jaist.ac.jp)

Propose （出題）: October, 18 (Mon) （10 月 18 日（月））

Deadline （締切）: October, 25 (Mon) 11:00am （10 月 25 日（月）11:00am）

Note （注意）: Do not forget to handwrite your name, student ID, problems, and answers on your report. （レポートには氏名，学生番号，問題，解答を，すべて手書きで書くこと.）

Choose any problems from the following whose total makes up to 12 points, and answer them. If your score exceeds 10 points, it will be cut off to 10 points. （トータルが 12 ポイント以下になるように以下の問題を選び，答えよ．最終的に 10 ポイントを越えたら，その分は切り捨てる.）

Problem 1 (3 points): Any given string x in Σ^*, we denote by $lo(x)$ and $oo(x)$ the indices of x in the pseudo-lexicographical ordering with length preferred and the usual lexicographical ordering, respectively. For example, we have $lo(\epsilon) = oo(\epsilon) = 1$, $lo(0) = oo(0) = 2$, $lo(1) = 3$, and $oo(00) = 3$. We also denote by $n < \infty$ when a number n is finite. Now, declare if each of the followings is true or false. If it is false, show a counterexample. In the followings, x denotes a string and n denotes a positive integer. （Σ^* 上の文字列 x に対して，長さ優先辞書式順序における x の出現順序を $lo(x)$，通常の辞書式順序における x の出現順序を $oo(x)$ と書くことにする．例えば $lo(\epsilon) = oo(\epsilon) = 1$，$lo(0) = oo(0) = 2$，$lo(1) = 3$，$oo(00) = 3$ である．またある数 n が有限であることを $n < \infty$ と書くことにする．このとき以下の記述が正しいか誤りかを判定せよ．誤りである場合は反例を示せ．ただし以下の記述中，x は文字列，n は正整数である.）

$$\forall x\, \exists n\, [\ |x| < \infty \to lo(x) < n\ ] \tag{1}$$

$$\exists n\, \forall x\, [\ |x| < \infty \to lo(x) < n\ ] \tag{2}$$

$$\overset{\infty}{\forall}\, x\, [\ |x| < \infty \to oo(x) < \infty\ ] \tag{3}$$

$$\overset{\infty}{\exists}\, x\, [\ |x| < \infty \to oo(x) < \infty\ ] \tag{4}$$

Problem 2 (3 points): Prove that the set of rational numbers is enumerable. （有理数の集合は可算であることを証明せよ.）

Problem 3 (4 points): In the class, Uehara proved that the set of real numbers is not enumerable. In his argument, replace all “real numbers” by “rational numbers.” Then, the argument should be wrong (if the claim in Problem 2 is correct). Find out the wrong point. （上原は授業の中で実数が非可算であることを示した．その証明の中の「実数」をすべて「有理数」でおきかえる．すると（問題 2 の主張が正しければ）, その有理数に関する議論は間違っているはずである．どこが違っているか指摘せよ.）

Problem 4 (3 points): The set N of natural numbers is enumerable. Now, prove that the set 2^N of subsets of N is *not* enumerable by diagonalization. （自然数の集合 N は可算無限集合である．N の部分集合の集合 2^N は非可算無限集合であることを対角線論法で証明せよ.）(Hint: For $S = \{1, 2, 3\}$, we have $2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.)

Problem 5 (3 points): We denote by $time\_A(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ the time complexity of a program A with specified inputs $x_1, x_2, \ldots, x_k$. We define the time complexity of the algorithm with inputs of length at most ℓ as follows:

$$time\_A(\ell) \equiv \max\{time\_A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid \sum_{1 \le i \le k} |x_i| \le \ell\}$$

This definition of the time complexity of length at most ℓ is measured in *the worst case manner*. Now we suppose that inputs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ are given to the algorithm with probability $Pr(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Define the time complexity of length at most ℓ measured in *the average case manner*. You can define new notations if you need. （プログラム A に入力 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ を与えたときの計算時間を $time\_A(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ と書く．このとき長さ高々ℓ までの入力の計算時間を

$$time\_A(\ell) \equiv \max\{time\_A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid \sum_{1 \le i \le k} |x_i| \le \ell\}$$

と定義した．これは「長さが高々ℓ までの入力に対する最悪時の時間計算量」を定義している．では入力 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ が与えられる確率が $Pr(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ であるとわかっていると仮定して「長さが高々ℓ までの入力に対する平均的な時間計算量」を定義せよ．必要ならば新しい記法を導入してもよい.）

Problem 6 (3 points): Determine whether each of the following equations is true or false. If it is true, prove it. If it is false, disprove it. （以下の式は正しいか．正しければ証明し，間違っていれば反証せよ.）

1. $100n^3 = O(5n^2 + n)$
2. $5n^2 + 3n = O(n^4 + 8)$

Problem 7 (4 points): Determine if each of the following equations is correct or wrong. If it is correnct, prove it. If it is wrong, disprove it. You can use l'Hospital's rule if you need it. （以下の式は正しいか．正しければ証明し，間違っていれば反証せよ．必要ならロピタルの定理を使ってもよい.）

1. $3n^3 + 4n^2 = O(n^2 + n)$
2. $3n^2 + 3n = O(n^8 + 2)$
3. $n = O(\log n)$
4. $\log n = O(n)$
5. $n^8 = O(2^n)$