

# Chap.4 Computational Complexity

## 4.1. Survey on Theory of Computational Complexity

“Computable?” → “How much cost is required for computation?”

Computational Complexity Theory

- (1) Studies on upper bound of computational cost
- (2) Studies on lower bound of computational cost
- (3) Structural studies on hardness of computation

### (1) Studies on upper bound of computational cost

Algorithm Theory: design of efficient algorithms

Suppose we have an algorithm  $A$  which solves a problem  $X$  in **at most** time  $T(n)$  for **any input of size  $n$** . Then, an **upper bound** on the time complexity of the algorithm  $A$  is  $T(n)$ .

(asymptotic worst case time complexity)

# 第4章 計算の複雑さ入門

## 4.1. 計算の複雑さの理論概観

「計算可能か？」→「どの程度の計算コストで計算可能か？」  
計算の複雑さの理論 (Computational Complexity Theory)

- (1) 計算量の上限に関する研究
- (2) 計算量の下限に関する研究
- (3) 計算の難しさについての構造的な研究

### (1) 計算量の上限に関する研究

効率のよいアルゴリズムの設計 (アルゴリズム理論)  
ある問題  $X$  に対して、それを解くアルゴリズム  $A$  があり、  
サイズ  $n$  の **どんな問題例** に対しても  $A$  の時間計算量が  
 $T(n)$  **以内** であるとき、アルゴリズム  $A$  の時間計算量の  
**上限** は  $T(n)$

(**最悪時の漸近的**時間計算量)

## **(2) Studies on lower bound of computational cost**

If *any* algorithm for a problem  $X$  takes time  $T(n)$  in the worst case, a lower bound on the time complexity of the problem  $X$  is  $T(n)$ .

- $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  conjecture
- Robustness of crypto system

## **(3) Structural studies on hardness of computation**

Studies to characterize hardness in the level of “xx-hardness” hierarchical structure depending on the hardness

## (2) 計算量の下限に関する研究

問題  $X$  に対する**どんなアルゴリズム**も最悪の場合には  $T(n)$  時間だけ必ずかかってしまうとき, 問題  $X$  の時間計算量の下限は  $T(n)$ .

- ・  $P \neq NP$  予想
- ・ 暗号システムの強さ

## (3) 計算の難しさについての構造的な研究

“ $xx$ 程度の難しさ”がもつ特徴について調べること.  
難しさの程度による階層構造.

## 4.2 Measuring Computation Time

### 4.2.1 Revisiting Programs in the Standard form

#### Programs in the standard form

prog program name (input ...);

var pc:  $\Sigma^*$ ; ... ;  $\Sigma$ ; ... ;  $\Sigma^*$ ;

begin

pc:=1;

while pc $\neq$ 0 do

case pc of

1: (statement);

2: (statement);

3: (statement);

.....

$k$ : (statement);

end-case

end-while;

halt(variable of type  $\Sigma^*$ );

end.

Program consists of a while-loop

Each statement must be either  
 if comparison then pc:= $k_1$  else pc:= $k_2$  end-if  
 or  
 substitution; pc:= $k$ ;

## 4.2. 計算時間の計り方

### 4.2.1. 標準形プログラム再考

#### 標準形プログラム

```

prog プログラム名(input ...);
var pc:  $\Sigma^*$ ; ...;  $\Sigma$ ; ...;  $\Sigma^*$ ;
begin
  pc:=1;
  while pc $\neq$ 0 do
    case pc of
      1: (文);
      2: (文);
      3: (文);
      .....
      k: (文);
    end-case
  end-while;
  halt( $\Sigma^*$ 型の変数);
end.

```

全体は大きな while-loop

各(文)の形は

- if 比較文 then  $pc:=k_1$  else  $pc:=k_2$  end-if
- 代入文;  $pc:=k$ ;

のいずれか.

- Constraints to execute each statement in constant time

$u, u'$ : variable of type  $\Sigma$ ,       $v, v'$ : variable of type  $\Sigma^*$   
 $c$ : constant of type  $\Sigma$ ,       $s$ : constant of type  $\Sigma^*$

### (Substitution)

- (1)  $u := c$ ;                      (2)  $u := u'$ ;  
 (3)  $u := \text{head}(v)$ ;      (4)  $u := \text{tail}(v)$ ;  
 (5)  $v := s$ ;                      ~~(6)  $v := v'$ ; ??~~  
 (7)  $v := \text{right}(v)$ ;      (8)  $v := \text{left}(v)$ ;  
 (9)  $v := u \# v$ ;              (10)  $v := v \# u$ ;

### (Comparison)

- (11)  $u = c$                       (12)  $v = s$

- comparison of the form  $v = v'$  is forbidden

・各文が高々定数時間で実行できるための制約

$u, u'$ :  $\Sigma$ 型の変数,       $v, v'$ :  $\Sigma^*$ 型の変数  
 $c$ :  $\Sigma$ 型の定数,       $s$ :  $\Sigma^*$ 型の定数

- (代入文) (1)  $u := c$ ;      (2)  $u := u'$ ;  
 (3)  $u := \text{head}(v)$ ;      (4)  $u := \text{tail}(v)$ ;  
 (5)  $v := s$ ;      ~~(6)  $v := v'$ ; ??~~  
 (7)  $v := \text{right}(v)$ ;      (8)  $v := \text{left}(v)$ ;  
 (9)  $v := u \# v$ ;      (10)  $v := v \# u$ ;  
 (比較文) (11)  $u = c$       (12)  $v = s$

・  $v = v'$  の形の比較は禁止されている.



## 4.2 Measuring Computation Time

### Definition 4.1

#### (Computation time)

**$A$ : program with  $k$  inputs in the standard form**

**$x_1, x_2, \dots, x_k$ : inputs to  $A$**

Single execution of while loop in  $A$  is “**one step**” in  $A$ .

The number of iterations of the while loop required before  $A$  halts is called

**the computation time of  $A$  for inputs  $x_1, x_2, \dots, x_k$**   
(in short, computation time of  $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ).

If  $A$  does not halt, its computation time is infinite.

$time\_A(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv$  computation time of  $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$

$time\_A(l) \equiv \max \{ time\_A(x_1, x_2, \dots, x_k) : \sum_{1 \leq i \leq k} |x_i| \leq l \}$

## 4.2. 計算時間の計り方

### 4.2.1. 標準形プログラム再考

#### 定義4.1. (計算時間の定義)

$A$ :  $k$ 入力標準形プログラム

$x_1, x_2, \dots, x_k$ :  $A$ への入力

$A$ のwhileループ1回り分の実行を $A$ での1ステップという.

入力 $x_1, x_2, \dots, x_k$ に対して $A$ が停止するまでに回るwhileループの回数を $A$ の $x_1, x_2, \dots, x_k$ に対する計算時間(略して $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の計算時間)という. ただし, 停止しないとき, 計算時間は無限大.

$time\_A(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv A(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の計算時間

$time\_A(l) \equiv \max \{ time\_A(x_1, x_2, \dots, x_k) : \sum_{1 \leq i \leq k} |x_i| \leq l \}$

## 4.2.2. Time complexity of a program

The time complexity of a program is represented as a *function of input size* (length of an input string)

*Valid* Encoding:

Encoding into *at most constant times* larger than the original.

### Ex.4.5: Unary and binary representations

Binary representation is a valid encoding in the standpoint of “size of a number is its number of bits”, but unary one is redundant.

## 4.2.2. プログラムの時間計算量

プログラムの時間計算量を**入力サイズ**の関数として表現  
(入力文字列の長さ)

妥当なコード化:

元の対象のサイズに定数倍の範囲内で忠実なコード化

### 例4.5: 1進表記と2進表記

「数のサイズはその桁数」との立場では  
2進表記は妥当なコード化であるが,  
1進表記は冗長なコード化

**Definition 4.3:** For functions  $f$  and  $g$  on natural numbers, if  
$$\exists c, d, n_0 > 0, \forall n > n_0 [f(n) \leq c g(n) + d]$$
then we say  $f$  is in the order of  $g$  and denote it by  $f = O(g)$ .

**Remark:** the constants  $c$ ,  $d$  and  $n_0$  must be determined independently of  $n$ .

**Theorem 4.1:** The followings hold for any functions  $f$ ,  $g$  and  $h$  on natural numbers:

1.  $\forall n [f(n) \leq g(n)] \rightarrow f = O(g)$
2.  $\exists c > 0, \forall n [f(n) \leq c g(n)] \rightarrow f = O(g)$
3.  $[f = O(g) \text{ and } g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

**定義4.3:** 自然数上の任意の関数  $f$  と  $g$  に対して、もし  
 $\exists c, d, n_0 > 0, \forall n > n_0 [f(n) \leq c g(n) + d]$   
ならば  $f$  は オーダー  $g$  であるといい  $f = O(g)$  と書く。

注意: 定数  $c, d, n_0$  は  $n$  と独立でなければならない。

**定理4.1:** 自然数上の任意の関数  $f, g, h$  に対し、以下が成立:

1.  $\forall n [f(n) \leq g(n)] \rightarrow f = O(g)$
2.  $\exists c > 0, \forall n [f(n) \leq c g(n)] \rightarrow f = O(g)$
3.  $[f = O(g) \text{ and } g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

### 4.2.3. Time complexity of a problem

**Def.4.4.** Let  $\Phi$  be a computing problem and  $t$  be a function over natural numbers. If we have a program  $A$  to compute  $\Phi$  and some constants  $c$  and  $d > 0$  such that

$$\forall l [time\_A(l) \leq ct(l) + d]$$

then we say that  $\Phi$  is computable in  $O(t)$  time, or time complexity of  $\Phi$  is  $O(t)$ .

Note: We assume here that a computing problem is that of recognizing a set.

Intuitively

problem  $\Phi$  is computable within time  $t$

- time complexity of  $A$  may be less than  $t$ .
- there may be a faster program to compute  $\Phi$  than  $A$  does.

### 4.2.3. 問題の時間計算量

**定義4.4.**  $\Phi$  を計算問題とし,  $t$  を自然数上の関数とする.  
いま  $\Phi$  を計算するプログラム  $A$  と定数  $c, d > 0$  が存在して,  
$$\forall l [time\_A(l) \leq ct(l) + d]$$
ならば,  $\Phi$  は  $O(t)$  時間計算可能, あるいは  $\Phi$  の時間計算量は  $O(t)$  であるという.

注意: ここでは計算問題として, 集合の認識問題を想定している.

直観的には「問題  $\Phi$  は  $t$  時間以下で計算可能」という意味。

(注1)  $A$  の時間計算量は  $t$  より低いかもしれない.

(注2)  $A$  よりも速く  $\Phi$  を計算するプログラムがあるかもしれない.



## Ex.4.7. Time complexity of the problem determining primes

### Prime-determining problem(PRIME)

Input: a natural number  $n$  (binary representation)

Question: Is  $n$  prime?

PRIME  $\equiv \{ \lceil n \rceil : n \text{ is prime} \}$

Stirling's Formula:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

prog Naive(input n);      *try to divide by numbers between 2 – n-1*

begin

  for each  $i := 1 < i < n$  do

    if  $n \bmod i = 0$  then reject end-if

  end-for;

  accept

end.

*log n · log i time*

$O(l^6)$  time algorithm has been developed in 2002!!

$$\begin{aligned} \text{time\_Naive}(n) &\leq \sum_{1 < i < n} (c \log n \log i + d) \\ &= c \log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2) \end{aligned}$$

When the length of  $n$  is  $l$ ,  $l$  is approximately  $\log n$ . So,  $\text{time\_Naive} = O(l^2 2^l)$ . Thus, time complexity of PRIME is  $O(l^2 2^l)$ .

## 例4.7. 素数判定問題の時間計算量

### 素数判定問題(PRIME)

入力: 自然数  $n$  (ただし, 2進表記)

質問:  $n$  は素数か?

PRIME  $\equiv \{ \lceil n \rceil : n \text{ は素数} \}$

スターリングの公式:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```

prog Naive(input n);      2 ~ n-1の数で割ってみる
begin
  for each i := 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.

```

←  $\log n \cdot \log i$  時間

$$\begin{aligned}
 \text{time\_Naive}(n) &\leq \sum_{1 < i < n} (c \log n \log i + d) \\
 &= c \log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)
 \end{aligned}$$

$n$  の長さを  $l$  とすると,  $l$  はほぼ  $\log n$  だから,  $\text{time\_Naive} = O(l^2 2^l)$   
 故に, 素数判定問題の時間計算量は (高々)  $O(l^2 2^l)$

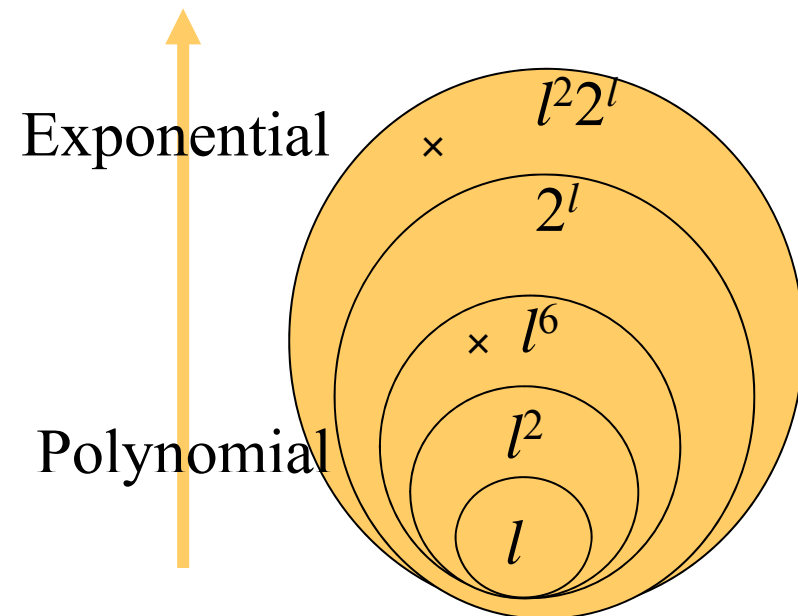
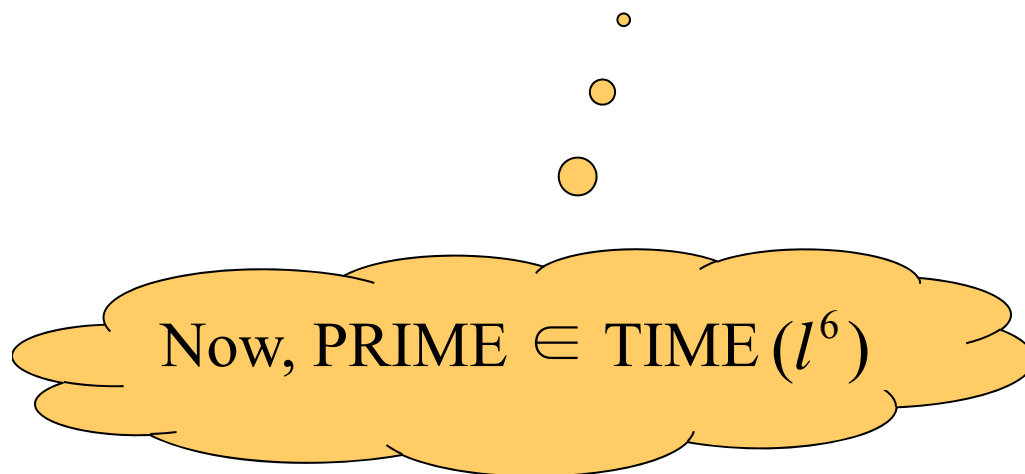
余談:  
 2002年に  
 $O(l^6)$   
 のアルゴリズム  
 が考案された!!

**Def.4.5.**

For a function  $t$  over natural numbers, the set of all sets (i.e. recognition problems) with time complexities  $O(t)$  is called  **$O(t)$ -time complexity class**, and it is denoted by **TIME( $t$ )**. And such a function  $t$  is called a time limit.

For example, a class of sets recognizable in time  $O(l^2 2^l)$  is TIME( $l^2 2^l$ ), and the set PRIME is one element.

$$\text{PRIME} \in \text{TIME}(l^2 2^l)$$



### 定義4.5.

自然数上の関数  $t$  に対し, 時間計算量が  $O(t)$  となる集合 (i.e., 認識問題) の全体を  **$O(t)$  時間計算量クラス** といい, そのクラスを **TIME( $t$ )** と表す.

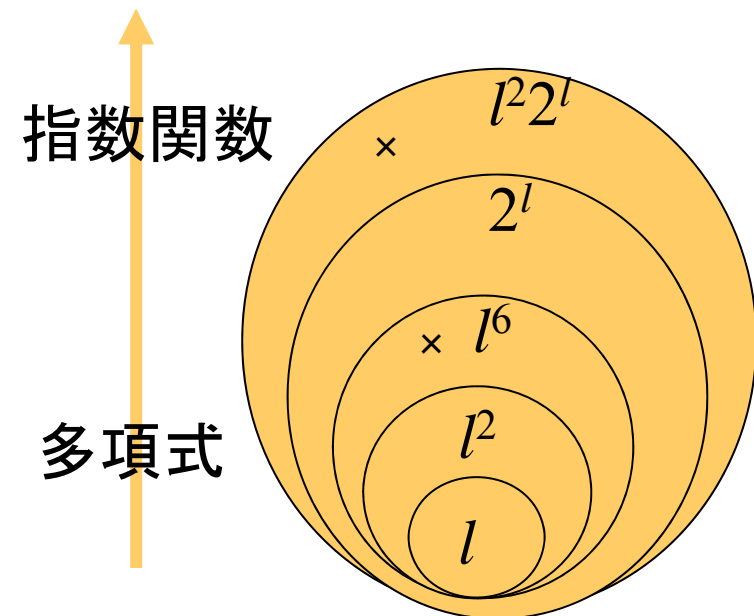
また,  $t$  のような関数を 制限時間 と呼ぶ.

たとえば,  $O(l^2 2^l)$  時間で認識可能な集合を集めたクラスが TIME( $l^2 2^l$ ) であり, 集合 PRIME はその一要素.

$$\text{PRIME} \in \text{TIME}(l^2 2^l)$$



今では  $\text{PRIME} \in \text{TIME}(l^6)$



# Chapter 5

## Representative Complexity Classes

### 5.1. Representative time complexity classes

$$\mathcal{P} \equiv \bigcup_{p:\text{polynomial}} \text{TIME}(p(l))$$

$$\mathcal{E} \equiv \bigcup_{c>1} \text{TIME}(2^{cl})$$

$$\mathcal{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{polynomial}} \text{TIME}(2^{p(l)})$$

$\mathcal{C}$  set: set in the complexity class  $\mathcal{C}$ .

$\mathcal{C}$  problem: problem of recognizing a  $\mathcal{C}$  set.

Problems not in  $\mathcal{P}$  are intractable  
from the practical viewpoint...

# 第5章 代表的な計算量クラス

## 5.1. 代表的な時間計算量クラス

$$\mathcal{P} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \text{TIME}(p(l))$$

$$\mathcal{E} \equiv \bigcup_{c>1} \text{TIME}(2^{cl})$$

$$\mathcal{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \text{TIME}(2^{p(l)})$$

$\mathcal{C}$ 集合: 計算量クラス $\mathcal{C}$ に入る集合.

$\mathcal{C}$ 問題:  $\mathcal{C}$ 集合の認識問題



ある問題が $\mathcal{P}$ に入っていないなら、  
現実的には手に負えない...

**Ex.5.1:** Polynomial makes no serious difference in the classes  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{EX}\mathcal{P}$ .

$\mathcal{P}$ : polynomial  $\times$  polynomial  $\rightarrow$  polynomial

$\mathcal{E}$ : linear power of 2  $\times$  polynomial  $\rightarrow$  linear power of 2

$\mathcal{EX}\mathcal{P}$ : poly. power of 2  $\times$  poly.  $\rightarrow$  poly. power of 2

Ex.5.2: Complexity class of PRIME

Ex.4.7  $\rightarrow$  PRIME  $\in$  TIME( $2^l$ )

Thus, PRIME  $\in$   $\mathcal{E}$

$O(l^6)$  time algorithm puts it into  $\mathcal{P}$ !!

**Def.5.1:**  $\mathcal{T}$ : set of time limits

$\bigcup_{t \in \mathcal{T}} \text{TIME}(t)$ :  $\mathcal{T}$  time complexity class

$\rightarrow$  It is denoted by TIME( $\mathcal{T}$ ).

Theorem 5.1 (1)  $\mathcal{P} = \bigcup_{c>0} \text{TIME}(l^c)$ , (2)  $\mathcal{EX}\mathcal{P} = \bigcup_{c>0} \text{TIME}(2^{l^c})$

**例5.1:** クラス  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{EXP}$ では, 多項式時間程度の違いは問題ではない.

$\mathcal{P}$ : 多項式  $\times$  多項式  $\rightarrow$  多項式

$\mathcal{E}$ : 2の線形乗  $\times$  多項式  $\rightarrow$  2の線形乗

$\mathcal{EXP}$ : 2の多項式乗  $\times$  多項式  $\rightarrow$  2の多項式乗

**例5.2:** PRIMEの計算量クラス

例4.7  $\rightarrow$  PRIME  $\in$  TIME( $2^l$ )

故に, PRIME  $\in$   $\mathcal{E}$

余談: 2002年に  $O(l^6)$  のアルゴリズムが考案されたので、今では  $\mathcal{P}$

**定義5.1.**  $T$ : 制限時間の集合

$\bigcup_{t \in T} \text{TIME}(t)$ :  $T$ 時間計算量クラス

$\rightarrow$ これをTIME( $T$ )と表す.

**定理5.1:** (1)  $\mathcal{P} = \bigcup_{c>0} \text{TIME}(l^c)$ , (2)  $\mathcal{EXP} = \bigcup_{c>0} \text{TIME}(2^{l^c})$



**Theorem 5.1:** (1)  $\mathcal{P} = \bigcup_{c>0} \text{TIME}(l^c)$ , (2)  $\mathcal{EXPTIME} = \bigcup_{c>0} \text{TIME}(2^l)^c$

**Proof:** The proof of (2) is omitted.

$\mathcal{T}_1$ : set of polynomials of the form of  $l^c$ .

$\mathcal{T}_2$ : set of all polynomials

→ since  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ ,  $\text{TIME}(\mathcal{T}_1) \subseteq \text{TIME}(\mathcal{T}_2)$

$p$ : arbitrary polynomial ( $p$  is any element of  $\mathcal{T}_2$ )

if the maximum degree of a polynomial  $p$  is  $k$ ,  $p(l) = O(l^k)$

From Theorem 4.3,

$\text{TIME}(p(l)) \subseteq \text{TIME}(l^k) \subseteq \text{TIME}(\mathcal{T}_1)$

Therefore,  $\text{TIME}(\mathcal{T}_1) = \text{TIME}(\mathcal{T}_2)$

Q.E.D.

Theorem 4.3:

For any times  $t_1, t_2$ ,

$t_1 = O(t_2)$  implies  $\text{TIME}(t_1) \subseteq \text{TIME}(t_2)$

**定理5.1:** (1)  $\mathcal{P} = \bigcup_{c>0} \text{TIME}(l^c)$ , (2)  $\text{EXP} = \bigcup_{c>0} \text{TIME}(2^{l^c})$

**証明:** (2)の証明は省略.

$T_1$ :  $l^c$ という形の多項式の集合.

$T_2$ : 多項式の全体

→  $T_1 \subseteq T_2$ なので,  $\text{TIME}(T_1) \subseteq \text{TIME}(T_2)$

$p$ : 任意の多項式 ( $p$ は $T_2$ の任意の要素)

多項式 $p$ の最大次数を $k$ とすると,  $p(l) = O(l^k)$

定理4.3より,

$\text{TIME}(p(l)) \subseteq \text{TIME}(l^k) \subseteq \text{TIME}(T_1)$

したがって,  $\text{TIME}(T_1) = \text{TIME}(T_2)$

証明終

定理4.3:

すべての制限時間  $t_1, t_2$  に対し、

$t_1 = O(t_2)$  ならば  $\text{TIME}(t_1) \subseteq \text{TIME}(t_2)$

### Ex.5.3. Problem of evaluating propositional expression (PROP-EVAL)

Input:  $\langle F, \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \rangle$

$F$  is an extended prop. expression

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$  is a truth assignment to  $F$

Question:  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ ?

	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
$(x, y)$	$(\neg x \vee y)$	$((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))$
$(0, 0)$	1	1
$(0, 1)$	1	0
$(1, 0)$	0	0
$(1, 1)$	1	1

### 例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)

入力:  $\langle F, \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \rangle$

$F$ は拡張命題論理式  $\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow$

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は  $F$  に対する真理値割り当て

質問:  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ ?

	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
$(x, y)$	$(\neg x \vee y)$	$((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))$
$(0, 0)$	1	1
$(0, 1)$	1	0
$(1, 0)$	0	0
$(1, 1)$	1	1

### Ex.5.3. Problem of evaluating propositional expression (PROP-EVAL)

**Input:**  $\langle F, \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \rangle$

$F$  is an extended prop. expression

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$  is a truth assignment to  $F$

**Question:**  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ ?

Construct a computation tree from a code  $\lceil F \rceil$  of ext. prop. expression

It is built in time  $O(|\lceil F \rceil|^3)$ .

If computation tree is available, we can easily obtain the value

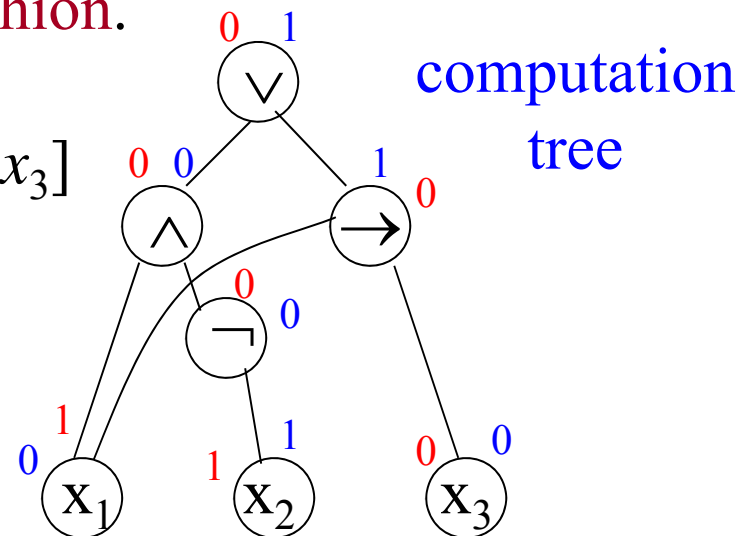
$F(a_1, a_2, \dots, a_n)$  in a **bottom-up fashion**.

Ex.:  $F(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$

$$F(0, 1, 0) = 1$$

$$F(1, 1, 0) = 0$$

Hence PROP-EVAL  $\in \mathcal{P}$



### 例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)

入力:  $\langle F, \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \rangle$

$F$ は拡張命題論理式  $\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow$

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は $F$ に対する真理値割り当て

質問:  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ ?

拡張命題論理式  $F$  がコード化されたもの  $\lceil F \rceil$  から計算木を作る.

計算木は  $O(|\lceil F \rceil|^3)$  時間で構成できる.

計算木が得られていれば, **ボトムアップ式**で

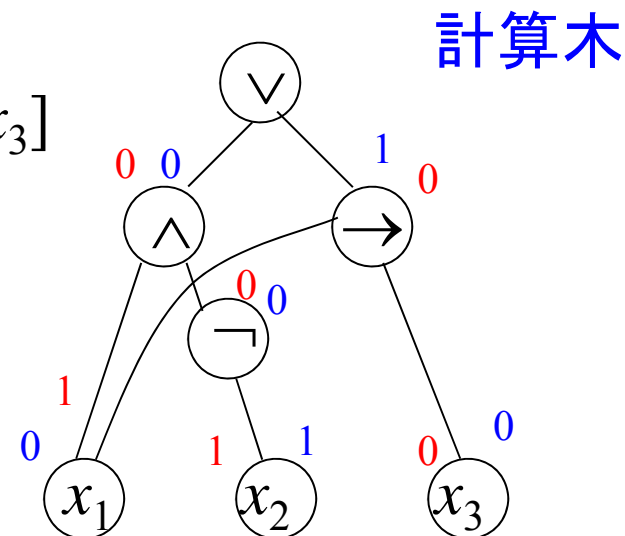
$F(a_1, a_2, \dots, a_n)$  の値は容易に計算可能. 0 1

例:  $F(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$

$$F(0, 1, 0) = 1$$

$$F(1, 1, 0) = 0$$

よって PROP-EVAL  $\in \mathcal{P}$



## Ex. 5.3. 2-Satisfiability (2SAT)

**Input:**  $\langle F \rangle$   $F$  is 2-conjunctive normal form

**Question:** Is there any assignment such that  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ ?

Conjunctive Normal Form (CNF)

$$F = (\bullet \vee \bullet \vee \dots \vee \bullet) \wedge (\bullet \vee \dots \vee \bullet) \wedge \dots \wedge (\dots)$$

- described by  $\wedge$  of  $\vee$  of literals.

exactly/at most

$k$  SAT

- Each clause contains  $k$  literals
- We can define 3SAT, 4SAT similarly.
- SAT consists of any CNF.
- ExSAT consists of any extended propositional expression.

## 例5.3. 命題論理式充足性問題: 2和積形(2SAT)

入力:  $\langle F \rangle$   $F$ は2和積形命題論理式

質問:  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ を満たす割り当てがあるか?

和積形:

$$F = (\bullet \vee \bullet \vee \dots \vee \bullet) \wedge (\bullet \vee \dots \vee \bullet) \wedge \dots \wedge (\dots)$$

- リテラルの論理和の論理積で表現されたもの

ちょうど/たかだか

$k$ 和積形( $k$  SAT)

- 和積形の各論理和が  $k$  個のリテラルを含む

- 3SAT, 4SAT も同様に定義できる。
- SAT: 各論理和のリテラルの個数に制限がないもの
- ExSAT: 入力が拡張命題論理式( $\rightarrow$ や  $\leftrightarrow$ も許す)



### Ex. 5.4: Graph reachability problem (ST-CON)

**Input:**  $\langle G, s, t \rangle$  : an undirected graph  $G$ ,  $1 \leq s, t \leq n (=|G|)$

**Question:** Does  $G$  have a path from  $s$  to  $t$ ?

- **Cycle** is a path that shares two endpoints.
- **Euler cycle** is a cycle that visits all **edges** once.
- **Hamiltonian cycle** is a cycle that visits all **vertices** once.

### Ex. 5.4: Euler cycle problem (DEULER)

**Input:**  $\langle G \rangle$ : a directed graph  $G$

**Question:** Does  $G$  have an Euler cycle?

### Ex. 5.5 Hamiltonian cycle problem (DHAM)

**Input:**  $\langle G \rangle$ : a directed graph  $G$

**Question:** Does  $G$  have a Hamiltonian cycle?

### 例5.4: 到達可能性問題(ST-CON)

入力:  $\langle G, s, t \rangle$ : 無向グラフ  $G$ ,  $1 \leq s, t \leq n (=|G|)$

質問:  $G$ 上で  $s$  から  $t$  への道があるか?

- 閉路とは、始点と終点が同じである路
- オイラー閉路とは、すべての辺を一度ずつ通る閉路
- ハミルトン閉路とは、すべての頂点を一度ずつ通る閉路

### 例5.4: 一筆書き閉路問題(DEULER)

入力:  $\langle G \rangle$ : 有向グラフ  $G$

質問:  $G$ はオイラー閉路をもつか?

### 例5.5: ハミルトン閉路問題(DHAM)

入力:  $\langle G \rangle$ : 有向グラフ  $G$

質問:  $G$ はハミルトン閉路をもつか?

It is known that:

- The following problems are in  $\mathcal{P}$ :
  - ✓ PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER
  
- The following problems are in  $\mathcal{E}$ , but...
  - ✓ 3SAT, DHAM



The class  $\mathcal{NP}$  between  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{E}$ ?

以下の事実が知られている:

- 以下の問題は  $\mathcal{P}$  に属する:
  - ✓ PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER
  
- 以下の問題は  $\mathcal{E}$  に属する、が、、、
  - ✓ 3SAT, DHAM



$\mathcal{P}$  と  $\mathcal{E}$  の間(?)のクラス  $\mathcal{NP}$