2.2. Elements of Computation

We will represent “data” and “program” in minimum resources

…to simplify the discussion.

2.2.1. Elements of data representation

String data type suffices to represent data.
All data types including structured type can be represented by strings on Σ (={0,1}).

Lemma 2.1: All elementary data types can be represented by Σ* types and structured type.

types for natural numbers, integers, reals, truth values, strings

Theorem 2.3. All the data types and elementary operations in our programming language can be realized on Σ*.

2.2. 計算の基本要素

「データ」や「プログラム」を最小限の資源で表現
…対象を絞ることで議論を単純化する

2.2.1. データ表現のための基本要素

データ表現のためには文字列型だけで十分.
構造型などを含め,
すべてのデータ(型)はΣ(={0,1})上の文字列型で代用可能

補題2.1.すべての基本データ型はΣ*型と構造型で実現できる.

自然数型, 整数型, 実数型, 論理値型, 文字列型

定理2.3. われわれのプログラミング言語のすべてのデータ型とその上の基本演算はΣ*型とその上の基本演算だけで実現できる.

2.2.2. Elements for Control Mechanism

Lemma 2.4: A function (definition and call of function) can be implemented by if and goto statements.

Lemma 2.5. All the control mechanisms can be realized by if and goto statements.

Theorem 2.6. All the control structures can be realized by if and while statements.

2.2. 計算の基本要素

「データ」や「プログラム」を最小限の資源で表現
…対象を絞ることで議論を単純化する

2.2.2. 制御機構のための基本要素

補題2.4. 関数プログラム(関数定義と関数呼び出し)は,
すべてif文とgoto文によって実現できる.

補題2.5. すべての制御構造はif文とgoto文によって実現できる.

定理2.6. すべての制御構造はif文とwhile文によって実現できる.

Simple program: a program consisting only of the following elements.
data type: string type on Σ (Σ type, Σ* type)
elementary operations: elementary operations on strings
execution statements: substitution, if (case), while, halt

Theorem 2.7 Any program can be rewritten into its equivalent simple program of the following form:

```
prog  Program name(input ...) ;
var pc: Σ*; ... Σ; ... Σ*; % value of pc is a binary representation of an integer
begin
  pc:=1;
  while pc != 0 do
     case pc of
      1: (statement) ;
      2: (statement) ;
        :
      k: (statement) ;
     end-case
   end-while;
  halt(c)
end.
```

each statement is one of the two:
・if comparison then pc:=k1 else pc:=k2 end-if
・substitution; pc:=k;

(Proof based on examples)

単純プログラム: 下の要素のみで構成されるプログラム
データ型: Σ上の文字列型(Σ型, Σ*型)
基本演算: 文字列型の基本演算
実行文: 代入文, if文(case文), while文, halt文

定理2.7. どんなプログラムもそれと同値な単純プログラムに書換えることができる. しかも次のような標準形プログラムに書き直せる

```
prog プログラム名(input ...) ;
var pc: Σ*; ... Σ; ... Σ*; %pcの値は自然数の2進表記
begin
  pc:=1;
  while pc != 0 do
     case pc of
      1: (文) ;
      2: (文) ;
        :
      k: (文) ;
     end-case
   end-while;
  halt(c)
end.
```

各(文)の形は
・if 比較文 then pc:=k1 else pc:=k2 end-if
・代入文; pc:=k;
のいずれか

(例に基づいて証明)

19/23

```
% program to determine whether x is 0* or not
prog A(input x: Σ*): Σ*;
label LOOP;  var a: Σ*;
begin
LOOP: if x= ε then halt(1) end-if;
        a:=head(x); x:=right(x);
        if a=1 then halt(0) else goto LOOP end-if
end.
```

Convert it as follows.

(1) Each line of a program is one of the followings:
  (a) substitution, goto statement
  (b) if comparison on Σ* then goto ... else goto ... end-if
  (c) halt(variable)
(2) Each line in the program body is labeled as L1, L2, ...
(3) The line of the form (c) above appears only once in the program and it is labeled as L0.

19/23

```
% xが0*かどうかを判定するプログラム
prog A(input x: Σ*): Σ*;
label LOOP;  var a: Σ*;
begin
LOOP: if x= ε then halt(1) end-if;
        a:=head(x); x:=right(x);
        if a=1 then halt(0) else goto LOOP end-if
end.
```

これを次のように変形する.

(1) プログラムの各行は次のいずれか.
  (a) 代入文とgoto文
  (b) if Σ*上の比較 then goto ... else goto ... end-if
  (c) halt(変数)
(2) プログラム本体の各行には，L1から始まり，L2, L3,...と順にラベルづけされている.
(3) ただし，(c)の形の行はプログラムの最後に1箇所しか現れず，それはL0とラベル付けされている.

20/23

```
prog A(input x: Σ*): Σ*;
label LOOP;  var a: Σ*;
begin
LOOP: if x= ε then halt(1) end-if;
        a:=head(x); x:=right(x);
        if a=1 then halt(0) else goto LOOP end-if
end.
```

```
prog B(input x: Σ*): Σ*;
label L0, L1, L2, L3, L4, L5, L6;
var a,c: Σ*;
begin
L1: if x= ε then goto L5 else goto L2 end-if;
L2: a:=head(x); goto L3;
L3: x:=right(x); goto L4;
L4: if a=1 then goto L6 else goto L1 end-if;
L5: c:=1; goto L0;
L6: c:=0; goto L0;
L0: halt(c)
end.
```

(3-2) Jump to the next line indicated by goto

(3-1) Usual process + goto next line

(2) Set values of halt

(1) Add halt

20/23

```
prog A(input x: Σ*): Σ*;
label LOOP;  var a: Σ*;
begin
LOOP: if x= ε then halt(1) end-if;
        a:=head(x); x:=right(x);
        if a=1 then halt(0) else goto LOOP end-if
end.
```

```
prog B(input x: Σ*): Σ*;
label L0, L1, L2, L3, L4, L5, L6;
var a,c: Σ*;
begin
L1: if x= ε then goto L5 else goto L2 end-if;
L2: a:=head(x); goto L3;
L3: x:=right(x); goto L4;
L4: if a=1 then goto L6 else goto L1 end-if;
L5: c:=1; goto L0;
L6: c:=0; goto L0;
L0: halt(c)
end.
```

(3-2) goto 文で次に実行する行に移動

(3-1) 通常の処理＋次に実行する行を決める

(2) haltの値を設定

(1) halt文を追加

21/23

```
prog B(input x: Σ*): Σ*;
label L0, L1, L2, L3, L4, L5, L6;
var a,c: Σ*;
begin
L1: if x= ε then goto L5 else goto L2 end-if;
L2: a:=head(x); goto L3;
L3: x:=right(x); goto L4;
L4: if a=1 then goto L6 else goto L1 end-if;
L5: c:=1; goto L0;
L6: c:=0; goto L0;
L0: halt(c)
end.
```

```
prog C(input x: Σ*): Σ*;
var pc: num; a,c:Σ*;
begin
  pc:=1;
  while pc != 0 do
    case pc of
      1:  if x= ε then pc:=5 else pc:=2 end-if;
      2: a:=head(x); pc:=3;
      3: x:=right(x); pc:=4;
      4: if a=1 then pc:=6 else pc:=1 end-if;
      5: c:=1; pc:=0;
      6: c:=0; pc:=0;
    end-case;
  end-while;
  halt(c)
end.
```

Program Counter

goto L*k* ➔ pc:=*k*;

Remark: case statement is realized by combination of if and goto

21/23

```
prog B(input x: Σ*): Σ*;
label L0, L1, L2, L3, L4, L5, L6;
var a,c: Σ*;
begin
L1: if x= ε then goto L5 else goto L2 end-if;
L2: a:=head(x); goto L3;
L3: x:=right(x); goto L4;
L4: if a=1 then goto L6 else goto L1 end-if;
L5: c:=1; goto L0;
L6: c:=0; goto L0;
L0: halt(c)
end.
```

```
prog C(input x: Σ*): Σ*;
var pc: num; a,c:Σ*;
begin
  pc:=1;
  while pc != 0 do
    case pc of
      1:  if x= ε then pc:=5 else pc:=2 end-if;
      2: a:=head(x); pc:=3;
      3: x:=right(x); pc:=4;
      4: if a=1 then pc:=6 else pc:=1 end-if;
      5: c:=1; pc:=0;
      6: c:=0; pc:=0;
    end-case;
  end-while;
  halt(c)
end.
```

Program Counter

goto L*k* ➔ pc:=*k*;

ただし，case文は実際にはif文の組み合わせで実現.

23/23

Theorem2.8 For every computable function, there is a program in the standard form.

Consider a behavior of program counter.

Further constraints(refer to 101 page of the textbook)
"each statement must be implemented in constant time"
u, u': variables of Σ type, v,v': variables of Σ* type
c: constant of Σ type, s: constant of Σ* type

(Substitution)
(1) u:=c; (2) u:=u';
(3) u:=head(v); (4) u:=tail(v);
(5) v:=s; ~~(6) v:=v';~~ ?
(7) v:= right(v); (8) v:=left(v);
(9) v:=u # v; (10) v:=v # u;

(Comparison)
(11) u=c (12) v=s

23/23

定理2.8. すべての計算可能関数に対し,
それを計算する標準形プログラムが存在する.

プログラムカウンタの働きを考えてみよう.

更なる制約(テキスト101ページ)
「各文は高々定数時間で実行できるものだけ」
u, u': Σ型の変数, v,v': Σ*型の変数
c: Σ型の定数, s: Σ*型の定数

(代入文)
(1) u:=c; (2) u:=u';
(3) u:=head(v); (4) u:=tail(v);
(5) v:=s; ~~(6) v:=v';~~ ?
(7) v:= right(v); (8) v:=left(v);
(9) v:=u # v; (10) v:=v # u;

(比較文)
(11) u=c (12) v=s

1/13

Chapter 2: Introduction to Computability

What "Computation" is…
- Difference between "computable" and "incomputable"
  - Basic factor of a "computation" (Done)
  - Proof of "incomputable"…diagonalization (Today)

2.1. Studies on recursive functions
recursive function theory
(1) studies on what is "computation"
(2) proof of incomputability
(3) structural studies on a class of incomputable functions
(4) related mathematics fields

1/13

2. 計算可能性入門

計算とは何か?
- 「計算できる」ことと「計算できない」ことの違い
  - 「計算」の基本要素(前回)
  - 「計算できない」ことの証明…対角線論法(今回)

2.1. 帰納的関数論概観
帰納的関数論(recursive function theory)
① "計算"とは何かについての研究
② 計算不可能性の証明
③ 計算不可能な関数のクラスの構造的研究
④ 他の数学との関連分野

2/13

Chapter 2: Introduction to Computability

(1) Studies on what is computation.
"When do we call a function computable?"

・recursive function theory by Kleene
・Turing machine theory by Turing

➔the whole set of recursive functions
=the whole set of functions computable by Turing machines

Church's Thesis on the definition of "computability"

2/13

2. 計算可能性入門

① 計算とは何かについての研究
「何をもって計算可能な関数というか?」

・クリーネが定義した帰納的関数(recursive function)
・チューリングが考えたチューリング機械(Turing machine)

➔帰納的関数全体=チューリング機械で計算可能な関数全体

計算可能性の定義…チャーチの提唱(Church's Thesis)

3/13

(2) Proof of incomputability

・Proof of computability is easy: just give a program

・to prove incomputability

we must prove that no program exists…

proof tools: diagonalization

recursive reducibility

Difficult!

(3) Structural studies on a class of incomputable functions

hierarchical class depending of hardness

→structural studies

(4) Related mathematics fields

mathematical logic

3/13

② 計算不可能性の証明

・計算可能性の証明ではプログラムを作ればよい

・計算不可能性の証明では

どんなプログラムも作れないことの証明:

「対角線論法」

「帰納的還元性」

難しい

③ 計算不可能な関数のクラスの構造的研究

難しさに応じて階層化されたクラス

→構造的研究

④ 他の数学との関連分野

数理論理学(mathematical logic)など

4/13

Chapter 2: Introduction to Computability

2.4. Incomputability Proof and Diagonalization

Halting Problem(**Problem of deciding whether it halts**)

Input: a program A and an input x to it.

Output: Whether does it stop if x is given to A?

Here we only consider the problem only for one-input programs, but we can generalize the argument into the cases of multiple inputs.

(Remark) Programs are also encoded into strings on Σ^*.

That is, A and x are also considered as strings on Σ^*.

$\lceil A \rceil$

4/13

2. 計算可能性入門

2.4. 計算不可能性の証明と対角線論法

停止問題(停止性判定問題)

入力: プログラム A とそれへの入力 x

出力: Aへ x を与えて実行させると(いつかは)停止するか?

ここでは1入力プログラムの停止問題のみ考えるが, この結果を多入力の場合に拡張することは可能.

(注意)プログラムもΣ^*上にコード化可能.

つまり, A も x もΣ^*上の文字列と考えることができる.

$\lceil A \rceil$

5/13

for $a, x \in \Sigma^*$

IsProgram(a)

$\Leftrightarrow$ [a is a one-input grammatically correct standard program]

eval(a, x)

$$\equiv \begin{cases} f\_a(x), & \text{if IsProgram}(a), \\ ?, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$f\_a(x)$: output value when an input x is given to the program represented by the code a

Theorem2.16: IsProgram and eval are computable (programmable).

IsProgram : compiler (lint program)

eval(a, x) : it suffices to simulate the behavior of the program for a code a with an input x, i.e. interpreter or emulator

refer to Section 4.3 for detail

5/13

各 $a, x \in \Sigma^*$ に対し,

IsProgram(a)

$\Leftrightarrow$ [aは1入力の文法的に正しい標準形プログラムのコード]

eval(a, x)

$$\equiv \begin{cases} f\_a(x), & \text{IsProgram}(a)\text{のとき}, \\ ?, & \text{その他のとき}. \end{cases}$$

$f\_a(x)$: コード a が表すプログラムに入力 x を加えたときの出力の値. ($f_a(x)$は部分関数)

定理2.16: IsProgram と eval はプログラムで実現可能.

IsProgram : コンパイラ(lint)

eval(a, x) : コード a が表すプログラムに x を入力したときの実行をシミュレートすればよい.
つまり, インタープリタ. (エミュレータ)

詳細は4.3節

6/13

Definition of a predicate Halt

for $a, x \in \Sigma^*$
Halt(a, x)
⇔ [IsProgram(a) ∧ [$\lfloor a \rfloor$ stops for an input x]]

Program described by code *a*

Ex.2.1 Halting is sometimes easily checked even with loops

```
prog B(input w: Σ*): Boolean;
 label LOOP;
 begin
   if w ≠ ε then LOOP: goto LOOP
            else halt(0) end-if
 end.
```

Assume that the program is written in the standard form

・Halt($\lceil$ B $\rceil$, ε): program B stops for an input ε

・¬Halt($\lceil$B$\rceil$, x) for any $x \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$
Thus, we can easily check whether B halts or not.

(Remark) eval($\lceil$B$\rceil$, ε) = 0 but, for $x \neq \varepsilon$
eval($\lceil$B$\rceil$, x) = ⊥ (undefined)

6/13

述語Haltの定義

各$a, x \in \Sigma^*$ に対し
Halt(a, x)
⇔ [IsProgram(a) ∧ [入力 x に対し$\lfloor a \rfloor$ は停止する.]]

コード*a*が表現するプログラム

例2.1 ループを含んでいても停止性を簡単に判定できる場合.

```
prog B(input w: Σ*): Boolean;
label LOOP;
begin
  if w ≠ ε then LOOP: goto LOOP
           else halt(0) end-if
end.
```

実際のプログラムは
標準形でかかれていると仮定

・Halt($\lceil$ B $\rceil$, ε): 入力εに対しプログラム B は停止.
・任意の $x \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$に対し, ¬Halt($\lceil$B$\rceil$, x)

Bの停止性は
容易に判定できる

(注意) eval($\lceil$B$\rceil$, ε) = 0 だが, $x \neq \varepsilon$ に対しては
eval($\lceil$B$\rceil$, x) = ⊥ (未定義)

7/13

Theorem 2.17: Halt is incomputable.

(Proof)
By contradiction: Assume that Halt is computable.
Halt is computable➔There is a program H to compute Halt.
Using the H, we obtain the following program X.

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
 label LOOP;
 begin
   if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
               else halt(0) end-if
 end.
```

Assume that it is written in the standard form

Using the function H we check whether the program $\lfloor w \rfloor$ stops for an input w. If the answer is "HALT" then the program X enters infinite loop, and if it is "DO NOT HALT" then it stops.

H: program or function, Halt: predicate

7/13

定理2.17 Haltは計算不可能

(証明)
背理法: Haltが計算可能だと仮定して矛盾を導く.
Haltが計算可能➔Haltを計算するプログラムHが存在する.
そのHを用いて, 次のようなプログラムXを作る.

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
 label LOOP;
 begin
   if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
               else halt(0) end-if
 end.
```

実際には標準形で書かれていると仮定.

プログラム$\lfloor w \rfloor$にwを入力したとき停止するかどうかを
プログラムHを呼び出して判定し,
答が *true* なら無限ループに入り,
答が *false* なら0を出力して停止する, というプログラム

H:プログラム, Halt:述語

Let $x_1 = \lceil X \rceil$ and input x_1 to the program X
(i) enters an infinite loop, or
(ii) stops normally with the output 0.

X(w) determines if program *w* halts on the input *w* or not using the program H, and it does not halt if the answer is *true*, and it halts if the answer is *false*.

Case (i)
・Since it enters infinite loop, ¬Halt(x_1, x_1)
・at the if statement in the program X we have H (x_1 , x_1)=false
So, halt(0) is executed (normal termination) : contradiction

Case (ii)
・Since it stops, Halt(x_1, x_1) is true.
・at the if statement in the program X we have H (x_1, x_1)=true
So, it enters an infinite loop: contradiction

In either case we have a contradiction.
That is, the assumption that "Halt is computable" is wrong.
End of proof

H:program or function, Halt:predicate

8/13

$x_1 = \lceil X \rceil$とし, x_1を
プログラムXに入力
(i) ループに入ってしまう, or
(ii) 0を出力して停止.

X(w)
プログラム$\lfloor w \rfloor$にwを入力したとき停止するか
どうかをプログラムHを呼び出して判定し,
答が *true* なら無限ループに入り,
答が *false* なら0を出力して停止する

(i) を仮定すると…
・プログラムがループに入るから, H (x_1 , x_1)= *true*
・つまり X(x_1) は停止する: 仮定に矛盾

(ii) を仮定すると…
・プログラムが終了するから, H (x_1, x_1)=*false*
・つまり X(x_1) は停止しない: 仮定に矛盾

どちらの場合も矛盾を生じる。
したがって「Haltは計算可能」という仮定は誤り.
証明終

H:プログラム
Halt:述語

9/13

Diagonalization

Enumerable infinite set:
a set with one-to-one correspondence with the set of all natural numbers

Enumerable set: finite or enumerable infinite set.
that is, a set whose elements are enumerable one by one.

Ex. 1: The set *E* of all even positive integers is enumerable infinite.
one-to-one correspondence between an element *i* of the set of all natural numbers and an element *2i* of the set *E*

Ex. 2: The set Z of all integers is enumerable infinite.
We can enumerate them as Z={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}.

Ex. 3: The set *R* of all rational numbers is enumerable infinite. (Why?)

Theorem: The set *R* of all real numbers is not enumerable.

9/13

対角線論法

可算無限集合: 自然数全体の集合との間に1対1対応がある集合のこと.
可算集合: 有限または可算無限である集合のこと.
つまり，1つずつ要素を取り出してきて，もれなく書き並べられるもの

例1. 正の偶数全体の集合*E*は可算無限である.
自然数全体の集合Nの要素 *i* と，*E*の要素 *2i* を対とする1対1対応がある.
例2. 整数全体の集合Zは可算無限である.
1対1対応がある. または，Z={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}と列挙できる.
例3. 有理数全体の集合は可算無限である.（なぜか？）

定理:実数全体の集合*R*は非可算である.

10/13

Theorem: The set *R* of all real numbers is not enumerable.

Using the diagonalization we prove that the set *S* of all real numbers between 0 and 1 is not enumerable. By contradiction, we assume that it is enumerable:

$0.a_{11}a_{12}a_{13}...$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}...$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}...$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}...$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}...$ where $a_{ij} \in \{0, 1, ..., 9\}$

$0.a_{11}a_{12}a_{13}...$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}...$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}...$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}...$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}...\ a_{kk}$

Define a new real number x by collecting those digits in the diagonal
$x = 0.b_1b_2b_3...$
where b_k is defined by
if a_{kk}=1 then b_k = 2 else b_k=1

The number *x* defined above is obviously between 0 and 1, but it is different from any number listed above since it is different at its diagonal position. That is, *x* does not belong to *S*, which is a contradiction. Therefore, our assumption that *S* is enumerable is wrong.

10/13

定理:実数全体の集合*R*は非可算である.

0以上1未満の実数全体の集合*S*が非可算であることを対角線論法で証明する. 可算であると仮定すると，すべての要素を書き並べることができる:

$0.a_{11}a_{12}a_{13}...$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}...$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}...$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}...$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}...$ ただし，$a_{ij} \in \{0,1, ..., 9\}$

$0.a_{11}a_{12}a_{13}...$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}...$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}...$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}...$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}...\ a_{kk}$

上の並びで対角線上にある数に注目し，新たな無限小数
$x = 0.b_1b_2b_3...$
を作る. ここで，
if a_{kk}=1 then b_k = 2 else b_k=1
としてb_kを定める.
このように作られた無限小数は明らかに0と1の間の実数である.
しかし，作り方から，上に列挙したどの要素とも等しくない（対角線の所で必ず異なる）.
つまり，*x*は*S*に属さないことになり，矛盾である.
したがって，*S*が可算であるという仮定に誤りがある.

11/13

Ex.2.17 Program X used in the proof of incomputability of Halt

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
  if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
               else  halt(0) end-if
end.
```

f_X: function computed by the program X

if $f\_a_i(a_i) = \perp$ then $\neg\mathrm{Halt}(a_i, a_i)$
$\therefore f\_\mathrm{X}(a_i) = 0$
if $f\_a_i(a_i) \neq \perp$ then, $\mathrm{Halt}(a_i, a_i)$
$\therefore f\_\mathrm{X}(a_i) = \perp$

That is, there is no function f_a_i in the set F_1 of functions such that $f\_X = f\_a_i$.

★The number of programs is enumerable, while the number of functions is not.

11/13

例2.17 Haltの計算不可能性の証明の中で用いたプログラムX

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
  if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
               else  halt(0) end-if
end.
```

f_X: プログラムXが計算する関数

$f\_a_i(a_i) = \perp$ のとき， $\neg\mathrm{Halt}(a_i, a_i)$
$\therefore f\_\mathrm{X}(a_i) = 0$
$f\_a_i(a_i) \neq \perp$ のとき， $\mathrm{Halt}(a_i, a_i)$
$\therefore f\_\mathrm{X}(a_i) = \perp$

つまり，$f_X = f_a_i$となるf_a_iは
計算可能な関数の集合F_1の中に存在しない.

★プログラムの個数は可算無限だが、関数の個数は非可算無限

12/13

Theorem 2.18 The following function diag is incomputable.

diag(a) = $f\_a(a)$ # 0, if Halt(a, a)
= ε, otherwise

Proof:

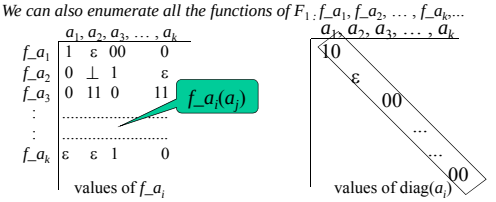
Let F_1 be a set of all computable functions (with one argument) .

Since a code of a program is an element of Σ^*,

we can enumerate all grammatically correct program codes

$a_1, a_2, \dots, a_k$ ... in the psuedo-lexicographical order.

We can also enumerate all the functions of F_1 : $f\_a_1, f\_a_2, \dots, f\_a_k$,...



$\mathrm{diag}(a_i) = w\#0$, if the value w of (f_a_i, a_i) is not undefined $\perp$.

ε, otherwise

12/13

定理2.18 次の関数 diag は計算不可能

diag(a) = $f\_a(a)$ # 0, Halt(a, a)のとき

= ε, その他のとき

証明:

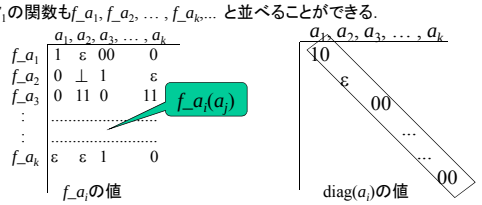
計算可能な(1引数の)関数全体の集合をF_1とする.

プログラムのコードはΣ^*の元だから,

"文法的に正しいプログラムのコード"を小さい順に$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$

と並べることができる.(長さ優先の辞書式順序)

F_1の関数も$f_a_1, f_a_2, \dots, f_a_k$,... と並べることができる.



$\mathrm{diag}(a_i) = w\#0$, $f_a_i(a_i)$の値wが未定義 ⊥でないとき

ε, その他のとき

13/13

diag is different from any f_a_i.

Why: diag() is different from $f\_a_i()$ at its diagonal position.

$\mathrm{diag}(a_i) \neq f\_a_i(a_i)$

(*two functions $f_1()$ and $f_2()$ are different if there exists an input x such that $f_1(x) \neq f_2(x)$.*)

$\mathrm{diag} \notin F_1$

That is, the function diag is not computable.

End of proof

The number of *functions* is "greater" than the number of *computable functions*.

Diagonalization

Given a set G of functions, construct a function g which does not belong to G.

13/13

diagはどのf_a_iとも異なる.

理由:diag()と$f_a_i()$は, 対角線の所で必ず異なる.

$\mathrm{diag}(a_i) \neq f\_a_i(a_i)$

$\mathrm{diag} \notin F_1$

つまり, 関数diagは計算可能でない.

証明終

[関数]の個数は[計算できる関数]の個数よりも``多い"

対角線論法:

ある要素が無限集合に属さないことを示すための論法。

ある関数の集合 G が与えられたとき, その集合に属さない関数 g を構成する方法を与えている。

こうして構成した g は、対角成分がつねに異なるため、関数集合 G には属さない。