第6章 多項式時間計算可能性の分析

6.1. 多項式時間還元可能性

定義6.1:

AとBを任意の集合とする.

(1) 関数 h: $A \rightarrow B$: 多項式時間還元(polynomial-time reduction)

$\Leftrightarrow$
- (a) h はΣ^*からΣ^*への全域的関数
- (b) $x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
- (c) h は多項式時間計算可能.

(2) AからBへの多項式時間還元が存在するとき,
AはBへ多項式時間還元可能という(polynomial time reducible).
このとき, 次のように書く:

$$\boxed{A \le_m^P B}$$

Chapter 6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Def.6.1:

Let A and B be arbitrary sets.

(1) function $h: A \rightarrow B$: polynomial-time reduction

$\Leftrightarrow$
- (a) h is a total function from Σ^* onto Σ^*
- (b) $x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
- (c) h is polynomial-time computable.

(2) When there is a polynomial-time reduction from A to B, we say *A* is polynomial-time reducible to *B*.

Then, we denote by

$$\boxed{A \leq_m^P B}$$

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

定義6.2: 計算量クラス$\mathcal{C}$に対し，集合Aが次の条件を満たすとき，それを（$\leq_m^P$の下で）$\mathcal{C}$-完全という.

(a) $\forall L \in \mathcal{C}\ [L \leq_m^P A]$

(b) $A \in \mathcal{C}$

補注：条件(a)を満たす集合は$\mathcal{C}$-困難.

例6.5. クラス$\mathcal{NP}$の完全集合の例

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VCなど

クラス$\mathcal{EXP}$の完全集合

EVAL-IN-E, HALT-IN-Eなど

6.2.Completeness based on Polynomial-time Reducibility

6.2.1. Definition of Completeness and its Basic Properties

Def.6.2: For a class $\mathcal{C}$, if a set A satisfies the following conditions, then it is called $\mathcal{C}$-complete (under $\leq_m^P$)

(a) $\forall L \in \mathcal{C}\ [L \leq_m^P A]$

(b) $A \in \mathcal{C}$

Note : Sets satisfying the condition (a) are called $\mathcal{C}$-hard.

Ex.6.5. Examples of $\mathcal{NP}$-complete sets

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VC, etc

$\mathcal{EXP}$-complete sets

EVAL-IN-E, HALT-IN-E, etc.

定理6.3. 任意の$\mathcal{C}$-困難集合(含:$\mathcal{C}$-完全集合)Aに対し,

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in \text{co-}\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \text{co-}\mathcal{NP}$　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \text{co-}\mathcal{NP} \rightarrow A \notin \text{co-}\mathcal{NP}$

(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

証明:

(1) Bを任意の$\mathcal{C}$集合とすると, Aは$\mathcal{C}$-困難だから,

$B \le_m^P A$　一方, $A \in \mathcal{P}$の仮定より, $B \in \mathcal{P}$ (定理6.1)

(2), (3), (4)も同様

Theorem 6.3. For any $\mathcal{C}$-hard (or $\mathcal{C}$-complete) set A,

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \notin$ co-$\mathcal{NP}$

(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

Proof: CP: contraposition

(1) Let B be any $\mathcal{C}$-set. Then, since A is $\mathcal{C}$-hard,

$B \leq_m^P A$ and by the assumption $A \in \mathcal{P}$ we have $B \in \mathcal{P}$ (Th. 6.1)

(2), (3), (4) are similar.

定理6.3. 任意の$\mathcal{C}$-困難集合(含:$\mathcal{C}$-完全集合)Aに対し,

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in \text{co-}\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \text{co-}\mathcal{NP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subset \text{co-}\mathcal{NP} \rightarrow A \notin \text{co-}\mathcal{NP}$

(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

定理5.9.
(1) $\mathcal{NP} \subseteq \text{co-}\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{NP} = \text{co-}\mathcal{NP}$

例6.6. 定理6.3の意味(クラス$\mathcal{NP}$)

Aを$\mathcal{NP}$-完全集合とする.

定理6.3(1)の対偶より,

$\mathcal{NP} \neq \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

定理6.3(3)の対偶と定理5.9(1)の対偶より,

$A \notin \text{co-}\mathcal{NP}$

つまり, $\mathcal{NP}$-完全集合は$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$である限り,

多項式時間では認識できない.

Theorem 6.3. For any $\mathcal{C}$-hard (or $\mathcal{C}$-complete) set A,

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \notin$ co-$\mathcal{NP}$

(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

Theorem 5.9.

(1) $\mathcal{NP} \subseteq$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{NP}$

Ex.6.6: Meaning of Theorem 6.3 (class $\mathcal{NP}$)

Let A be $\mathcal{NP}$-complete set.

By the contraposition of Theorem 6.3(1) we have

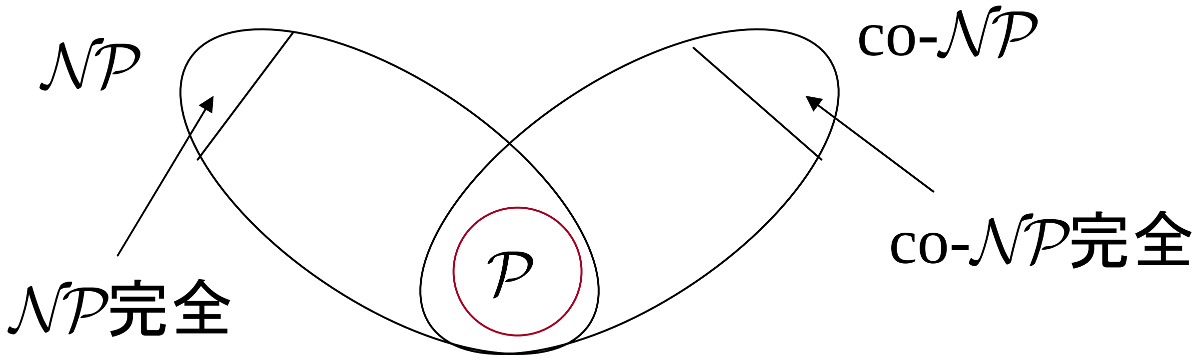
$$\mathcal{NP} \neq \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$$

By the contraposition of Theorem 6.3(3) and that of Theorem 5.9(1),

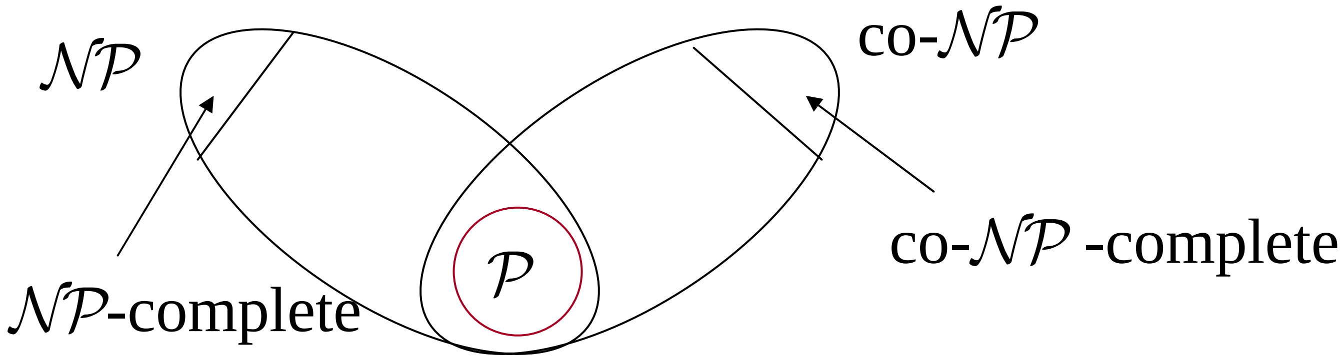
$$A \notin \text{co-}\mathcal{NP}$$

That is, $\mathcal{NP}$-complete sets are $\mathcal{NP}$-sets that cannot be recognized in polynomial time unless $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

$\mathcal{NP}$-完全集合は$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$である限り, $\mathcal{NP} \cap$ co-$\mathcal{NP}$には入らない$\mathcal{NP}$集合である.



$\mathcal{NP}$-compete sets are $\mathcal{NP}$-sets that do not belong to $\mathcal{NP} \cap$ co-$\mathcal{NP}$ unless $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.



例6.7. 定理6.3の意味（クラス$\mathcal{EXP}$)

Dを$\mathcal{EXP}$-完全集合とする.

定理6.3(1)の対偶（$\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P}$ → $A \notin \mathcal{P}$，ここでは$\mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{P}$ →$D \notin \mathcal{P}$)
$\mathcal{P} \neq \mathcal{EXP}$ → $\mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{P}$ (∵$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{EXP}$) → $D \notin \mathcal{P}$
定理6.3(2)の対偶（$\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP}$ → $A \notin \mathcal{NP}$,
ここでは$\mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{NP}$ →$D \notin \mathcal{NP}$)
$\mathcal{NP} \neq \mathcal{EXP}$ → $\mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{NP}$ (∵$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{EXP}$) → $D \notin \mathcal{NP}$
定理6.3(3)の対偶（$\mathcal{C} \not\subset$co-$\mathcal{NP}$ → $A \notin$co-$\mathcal{NP}$,
ここでは$\mathcal{EXP} \not\subset$co-$\mathcal{NP}$ →$D \notin$co-$\mathcal{NP}$)
co-$\mathcal{NP} \neq \mathcal{EXP}$ →$\mathcal{EXP} \not\subset$co-$\mathcal{NP}$ →$D \notin$ co-$\mathcal{NP}$
ところが定理5.7から $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{EXP}$ であるから, $D \notin \mathcal{P}$.

$\mathcal{EXP}$-完全集合は多項式時間では計算不可能.

Ex. 6.7. Meaning of Theorem 6.3 (class $\mathcal{EXP}$)

Let D be an $\mathcal{EXP}$-complete set.

Contraposition of Theorem 6.3(1)
($\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$, where $\mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow D \notin \mathcal{P}$)
$\mathcal{P} \neq \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{P}$ ($\because \mathcal{P} \subseteq \mathcal{EXP}$) $\rightarrow D \notin \mathcal{P}$
Contraposition of Theorem 6.3(2) ($\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$,
Here, $\mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow D \notin \mathcal{NP}$)
$\mathcal{NP} \neq \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{NP}$ ($\because \mathcal{NP} \subseteq \mathcal{EXP}$) $\rightarrow D \notin \mathcal{NP}$
Contraposition of Theorem 6.3(3) ($\mathcal{C} \notin$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \not\subset$ co-$\mathcal{NP}$,
here, $\mathcal{EXP} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow D \notin$ co-$\mathcal{NP}$)
co-$\mathcal{NP} \neq \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{EXP} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow D \notin$ co-$\mathcal{NP}$
But, by Theorem 5.7, since we know $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{EXP}$, we have $D \notin \mathcal{P}$.

$\mathcal{EXP}$-complete sets are not computable in polynomial time.

定理6.4. A: 任意の$\mathcal{C}$-完全集合

すべての集合Bに対し,

(1) $A \leq_m^P B$ → Bは$\mathcal{C}$-困難.

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \in \mathcal{C}$ → Bは$\mathcal{C}$-完全.

証明:

定義6.2より, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P A]$

定理6.2より, $L \leq_m^P A \wedge A \leq_m^P B \rightarrow L \leq_m^P B$

したがって, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P B]$

すなわち, Bは$\mathcal{C}$-困難.

Theorem 6.4. A: any $\mathcal{C}$-complete set

For any set B we have

(1) $A \le_m^P B \rightarrow B$ is $\mathcal{C}$-hard.

(2) $A \le_m^P B \wedge B \in \mathcal{C} \rightarrow B$ is $\mathcal{C}$-complete.

Proof:

By Def. 6.2 $\quad \forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P A]$

By Theorem 6.2, $\quad L \le_m^P A \wedge A \le_m^P B \rightarrow L \le_m^P B$

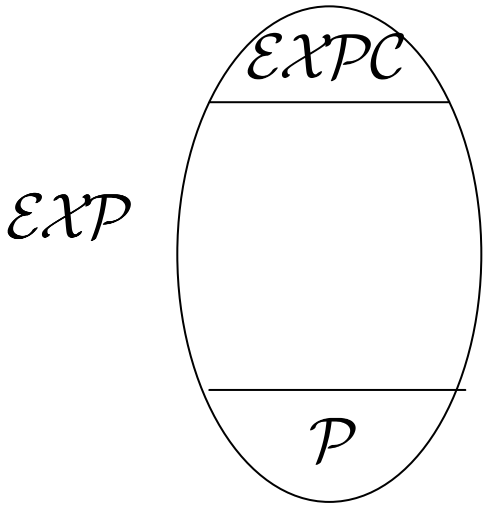
Therefore, $\quad \forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P B]$

That is, B is $\mathcal{C}$-hard.

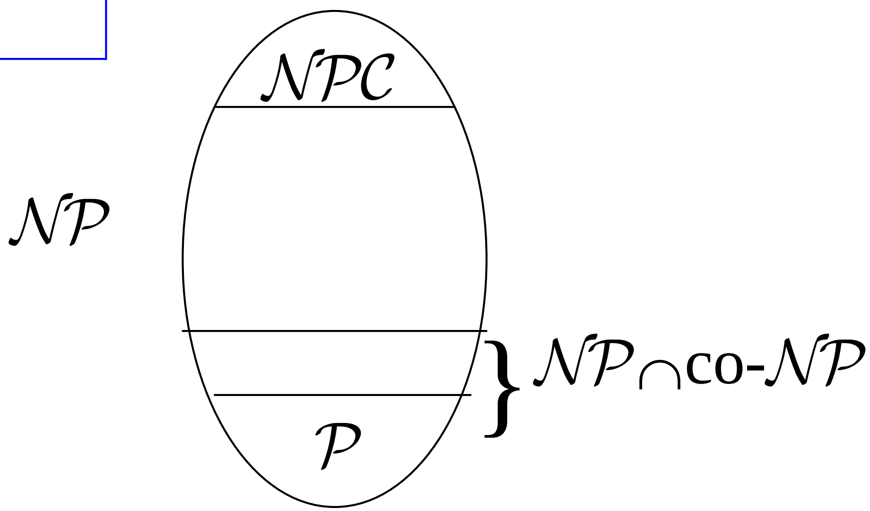
$\mathcal{EXPC} \equiv \{L: L$は$\mathcal{EXP}$-完全$\}$
$\mathcal{NPC} \equiv \{L: L$は$\mathcal{NP}$-完全$\}$

とすると，次の定理が成り立つ．

定理6.5.
(1) $\mathcal{EXPC} \cap \mathcal{P} = \phi$
(2) $\mathcal{EXP} - (\mathcal{EXPC} \cup \mathcal{P}) \neq \phi$



定理6.6: $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$**を仮定すると**
(1) $\mathcal{NPC} \cap \mathcal{P} = \phi$
(2) $\mathcal{NP} - (\mathcal{NPC} \cup \mathcal{P}) \neq \phi$



$\mathcal{EXPC} \equiv \{L: L \text{ is } \mathcal{EXP}\text{-complete}\}$

$\mathcal{NPC} \equiv \{L: L \text{ is } \mathcal{NP}\text{-complete}\}$

Then, we have the following theorems.

Theorem 6.5.

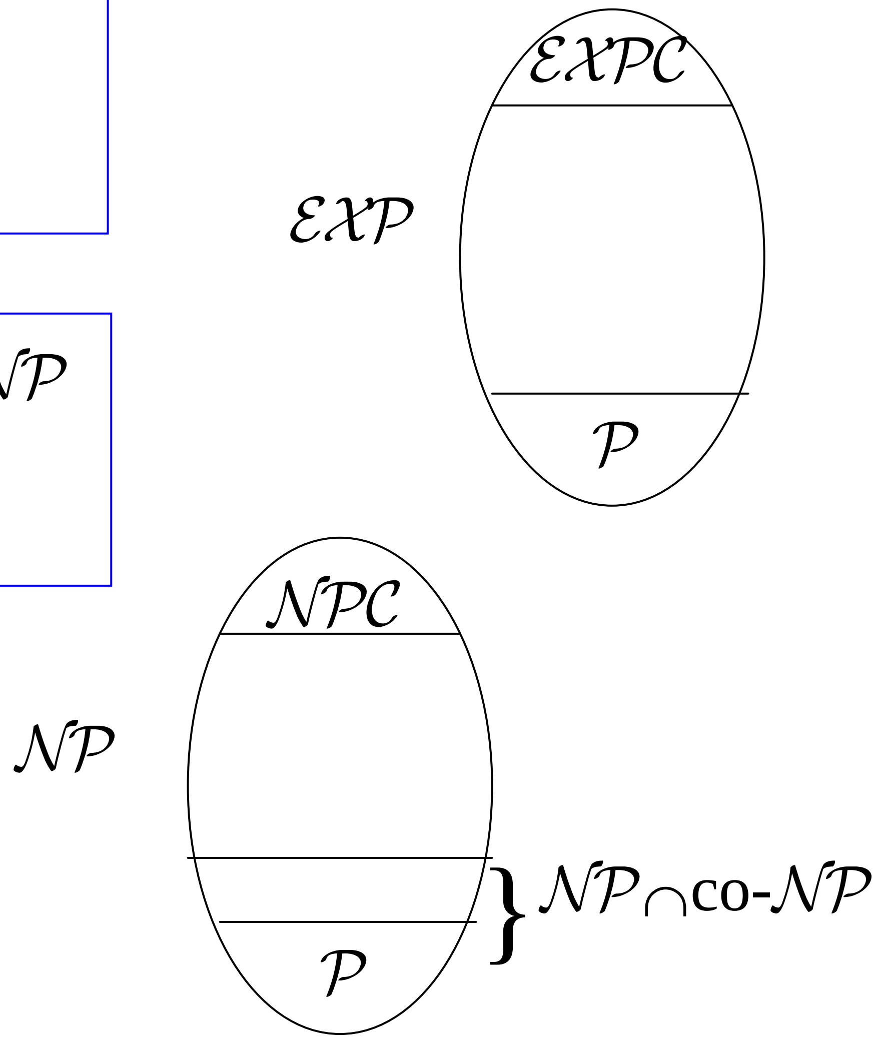
(1) $\mathcal{EXPC} \cap \mathcal{P} = \phi$

(2) $\mathcal{EXP} - (\mathcal{EXPC} \cup \mathcal{P}) \neq \phi$

Theorem 6.6: Assuming $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$

(1) $\mathcal{NPC} \cap \mathcal{P} = \phi$

(2) $\mathcal{NP} - (\mathcal{NPC} \cup \mathcal{P}) \neq \phi$



6.2.2. 完全性の証明

($\mathcal{NP}$)完全性の証明方法
(I) 定義通りに[すべてのL]について示す
(II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9(≒Cookの定理(SATでTMを模倣))

基本的には…
1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する

→<u>とても大変</u>(手間がかかる)

3SATなどは、形式が一様なので扱いやすい

(II)の例: 例6.4(3SAT $\leq_m^P$ DHAM), 定理6.10, …

DHAMは一般のグラフ上で$\mathcal{NP}$完全

DHAMは平面グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは「頂点の次数＝3」に限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは2部グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全…

6.2.2. Proof for completeness

Two ways to prove ($\mathcal{NP}$-)completeness
(I) show 'for all L' according to definition
(II) use some known complete problems

Ex for (I) : Theorem 6.7,
Theorem 6.9(≒Cook's Theorem; simulate TM by SAT)

Basically…
1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae

→<u>pretty complicated and tedious</u>

Easy to manipulate since, e.g., 3SAT has a uniform structure.

Ex for (II): Example 6.4(3SAT$\leq_m^P$ DHAM), Theorem 6.10, …

DHAM is $\mathcal{NP}$-complete for general graphs

DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for planar graphs
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for graphs with max degree=3
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for bipartite graphs …

定理6.10: 以下にあげる集合はすべて$\mathcal{NP}$-完全

(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)

(2) DHAM, VC (3SATからの還元)

(3) KNAP, BIN (3SATからの還元とKNAP $\leq_m^P$ BIN)

(II) $\mathcal{NP}$完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:

1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合

Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でも$\mathcal{NP}$完全。

高々2だと多項式時間で計算可能。

Theorem 6.10 The following sets are all $\mathcal{NP}$-complete:

(1) 3SAT, SAT (reduction from ExSAT)

(2) DHAM, VC (reduction from 3SAT)

(3) KNAP, BIN (reduction from 3SAT and KNAP $\leq_m^P$ BIN)

(II) Polynomial time reductions from $\mathcal{NP}$-complete problems:

1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$ DHAM with vertices of degree ≦5

Vertex Cover: a vertex set that contains at least one endpoint for each edge

Hamiltonian cycle: a cycle that visits each vertex exactly once

Note : DHAM remains $\mathcal{NP}$-complete even if max degree 3.
But it is polynomial time solvable if max degree 2.

定理6.10(2) : VC は $\mathcal{NP}$ 完全問題

[証明] VC $\in \mathcal{NP}$ なので、3SAT $\leq_m^P$ VC であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が与えられたとする。
Fから以下の条件を満たすグラフと自然数の組$<G, k>$が多項式時間で構成できることを示す:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \lor l_{i2} \lor l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

Theorem 6.10(2) : VC is $\mathcal{NP}$-complete

[Proof] Since VC $\in \mathcal{NP}$, we show 3SAT $\leq_m^P$ VC.

For given formula $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, we construct a pair $\langle G,k \rangle$ of a graph and an integer in polynomial time.

> There is an assignment that makes $F()=1$
> $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

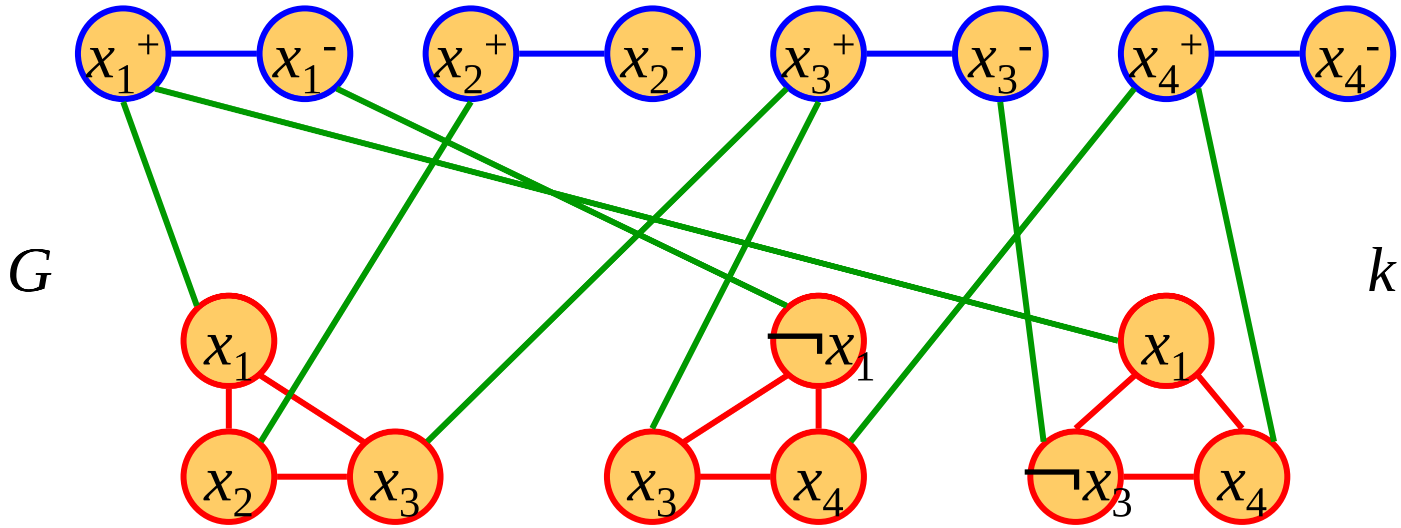
1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \lor l_{i2} \lor l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor x_3 \lor x_4) \land (x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4)$



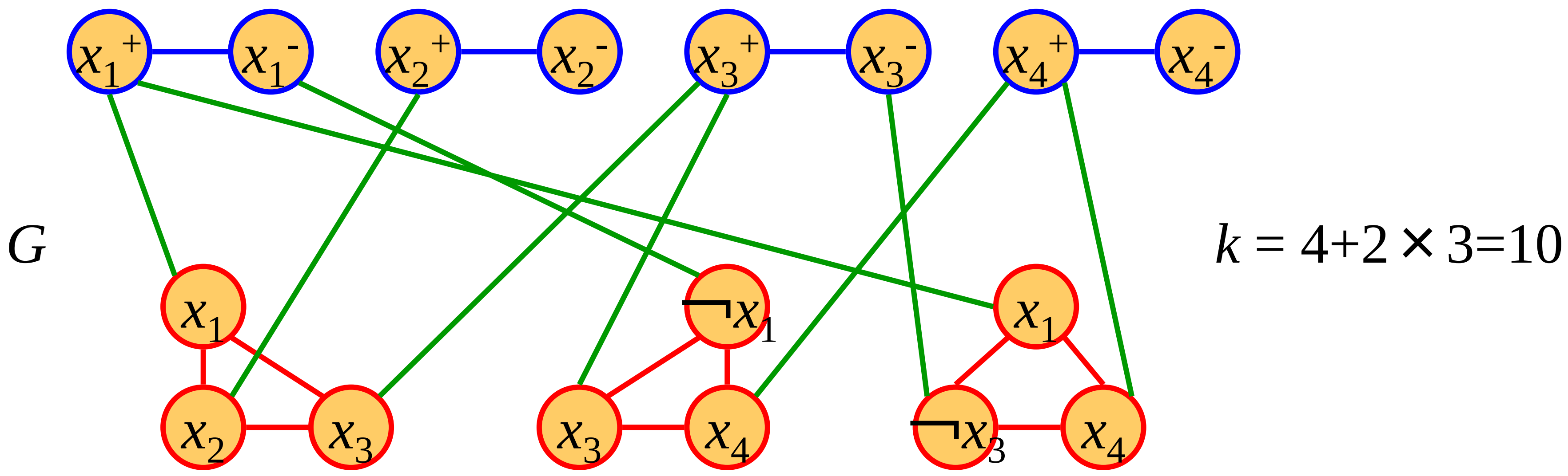
$k = 4+2 \times 3=10$

There is an assignment that makes $F()=1$
$\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



Gの構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能 。したがって以下を示せばよい:

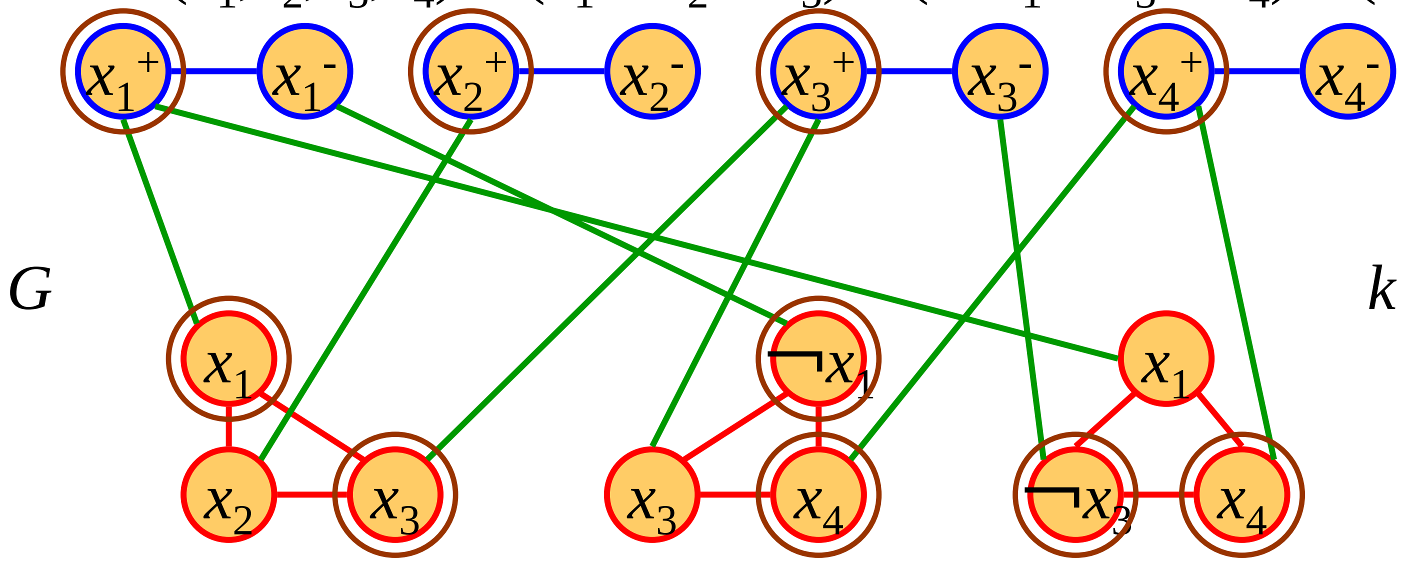
Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

観察:

Gの構成から任意の頂点被覆Sは
- x_i^+, x_i^-のどちらかを含む
- C_jの3頂点中、最低2つ含む

よって $|S| \geqq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3 = 10$

It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F. Hence, we show that…

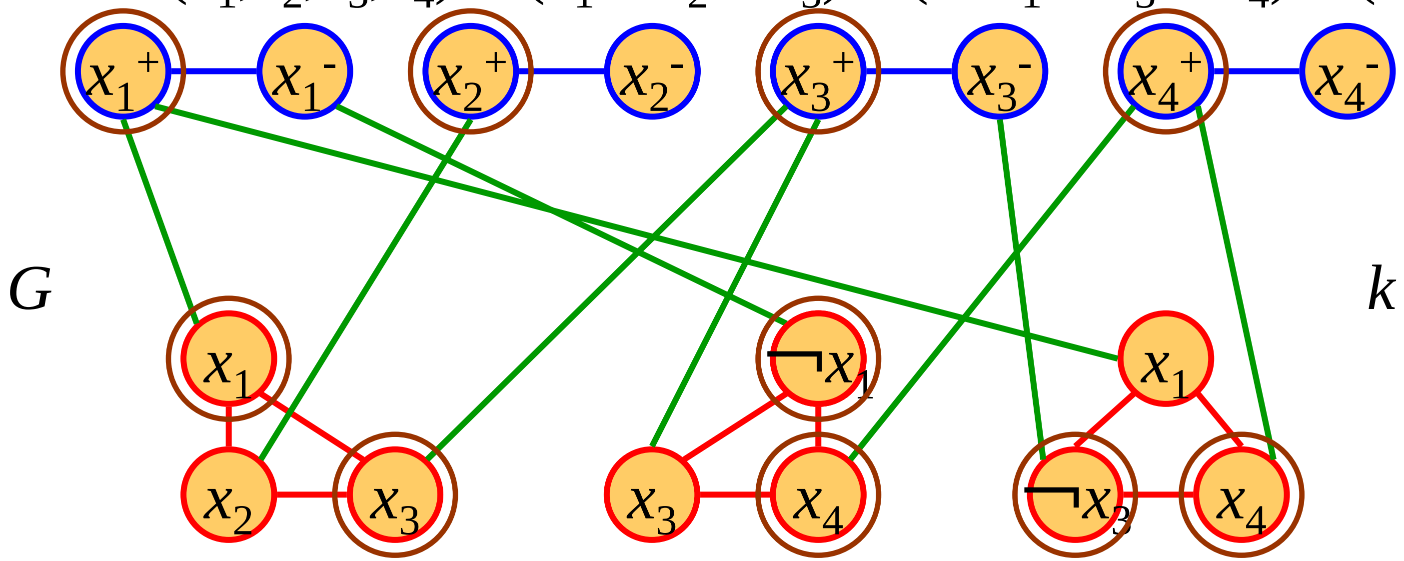
There is an assignment that makes $F()=1$
$\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Observation:

From the construction of G, any vertex cover S should contain
- at least one of x_i^+ or x_i^-
- at least 2 of 3 vertices in C_j

Hence we have $|S| \geqq n+2m = k$.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



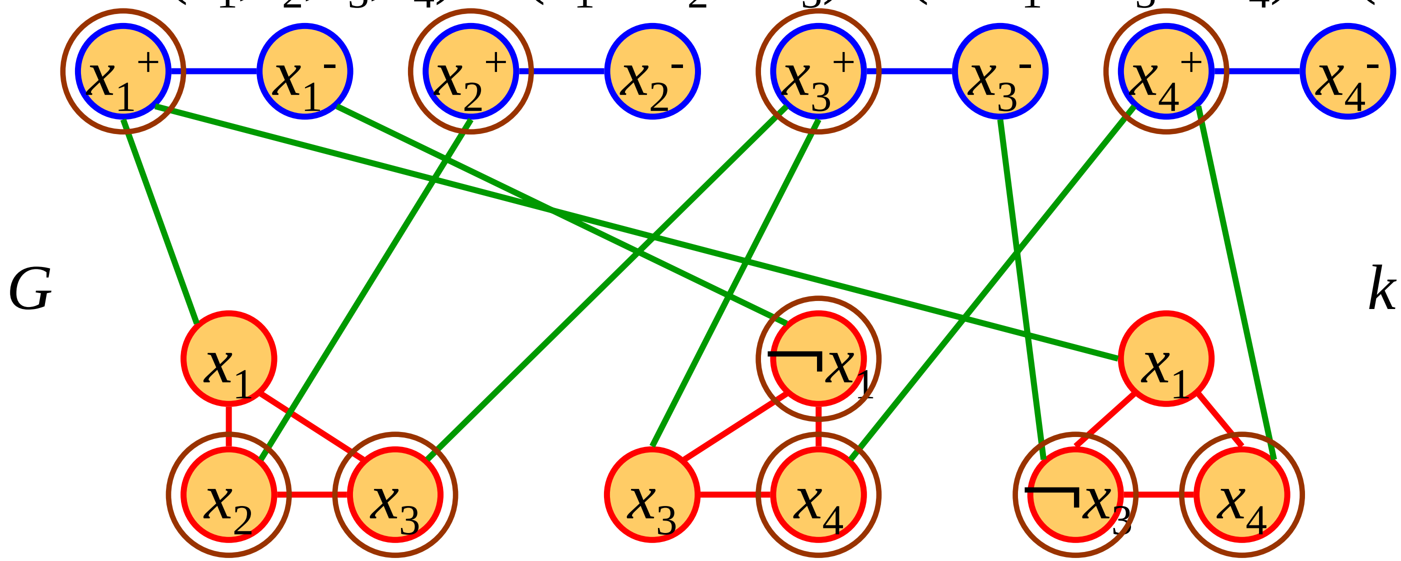
$k = 4+2\times3=10$

Fを1にする割当が存在する⇒Gがサイズkの頂点被覆を持つ

1. それぞれの変数 x_i が $\begin{cases} x_i=1\text{なら } x_i^+\text{を}S\text{に入れる} \\ x_i=0\text{なら } x_i^-\text{を}S\text{に入れる} \end{cases}$
2. それぞれの項$C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1},x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2},l_{i3})を S に入れる。

⇒ **観察** より、Sはサイズkの頂点被覆になる。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



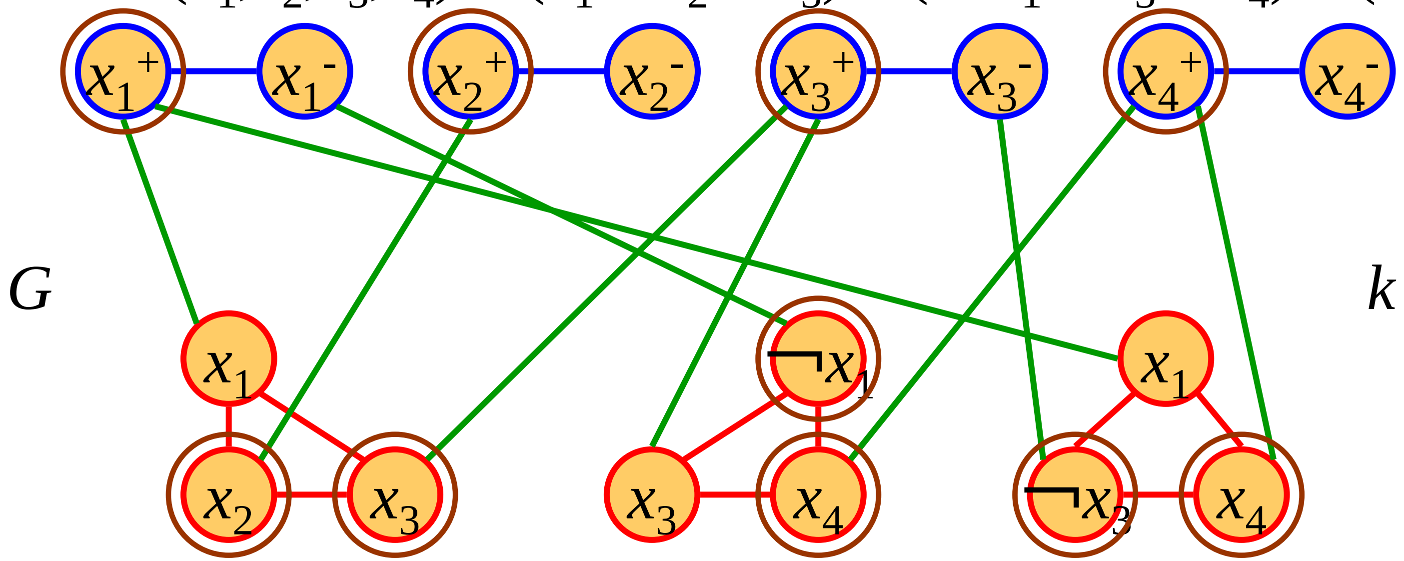
$k = 4+2\times 3=10$

If there is an assignment that makes $F()$=1,
G has a vertex cover of size k

1. Put $\begin{cases} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{cases}$ into S for each x_i.
2. Since each clause $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{i1}, the edge (l_{i1},x_{i1}) is covered by the variable x_{i1}. Therefore, put the remaining literals (l_{i2},l_{i3}) into S.

$\Rightarrow$ From the Observation, S is a vertex cover of size k.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2\times 3=10$

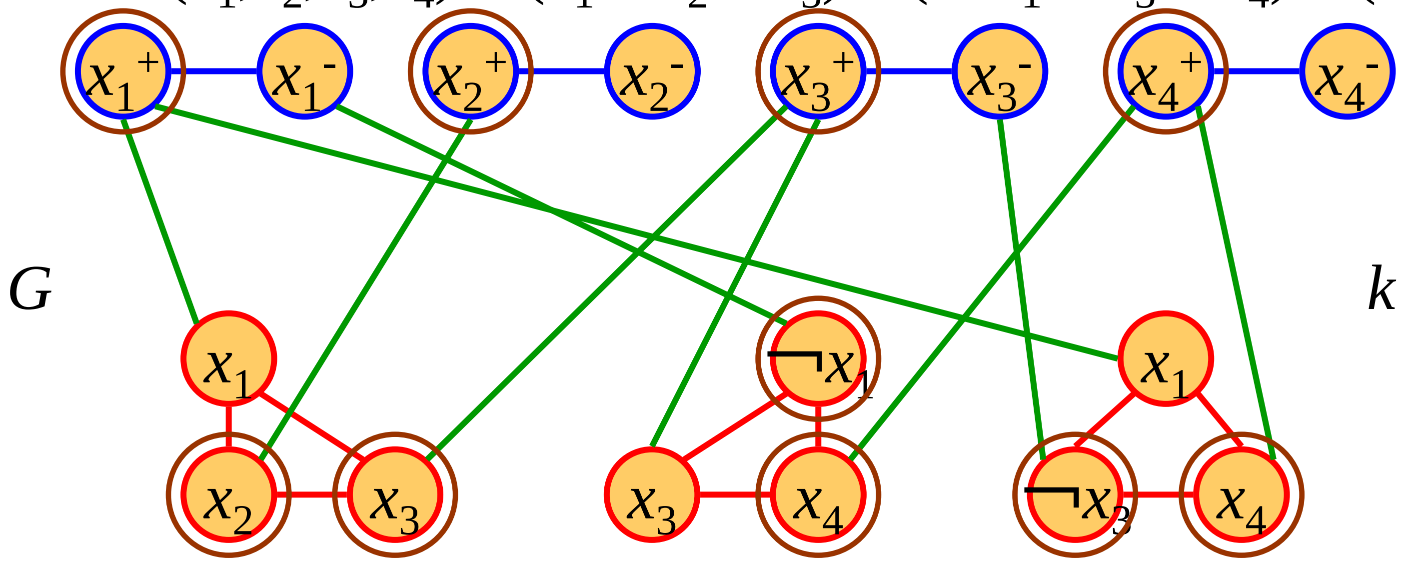
Gがサイズkの頂点被覆を持つ⇒ Fを1にする割当が存在する

1. 観察より、被覆Sは項から$2m$個、変数からn個の頂点を含む。
2. さらに各変数x_iについてはx_i^+かx_i^-の一方しか、各項C_jについてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。
3. よって各項C_jはSに含まれないリテラルl_iを含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} x_i^+ \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^- \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=0 \end{array} \right)$$

という割当はFを充足する。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2\times 3=10$

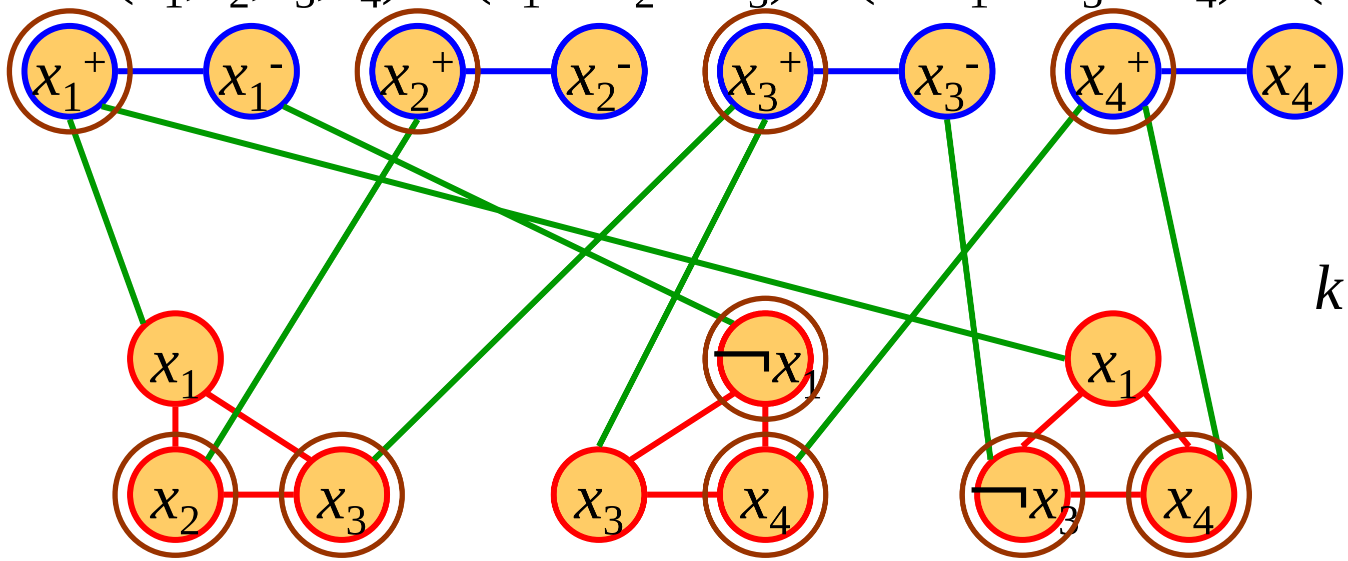
QED.

If G has a vertex cover of size k, there is an assignment s.t. $F()=1$

1. From Observation, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
2. Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j.
3. Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S, and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

$\Rightarrow$ The following assignment satisfies F: $\begin{cases} x_i=1 \text{ if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 \text{ if } x_i^- \text{ in } S \end{cases}$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



G

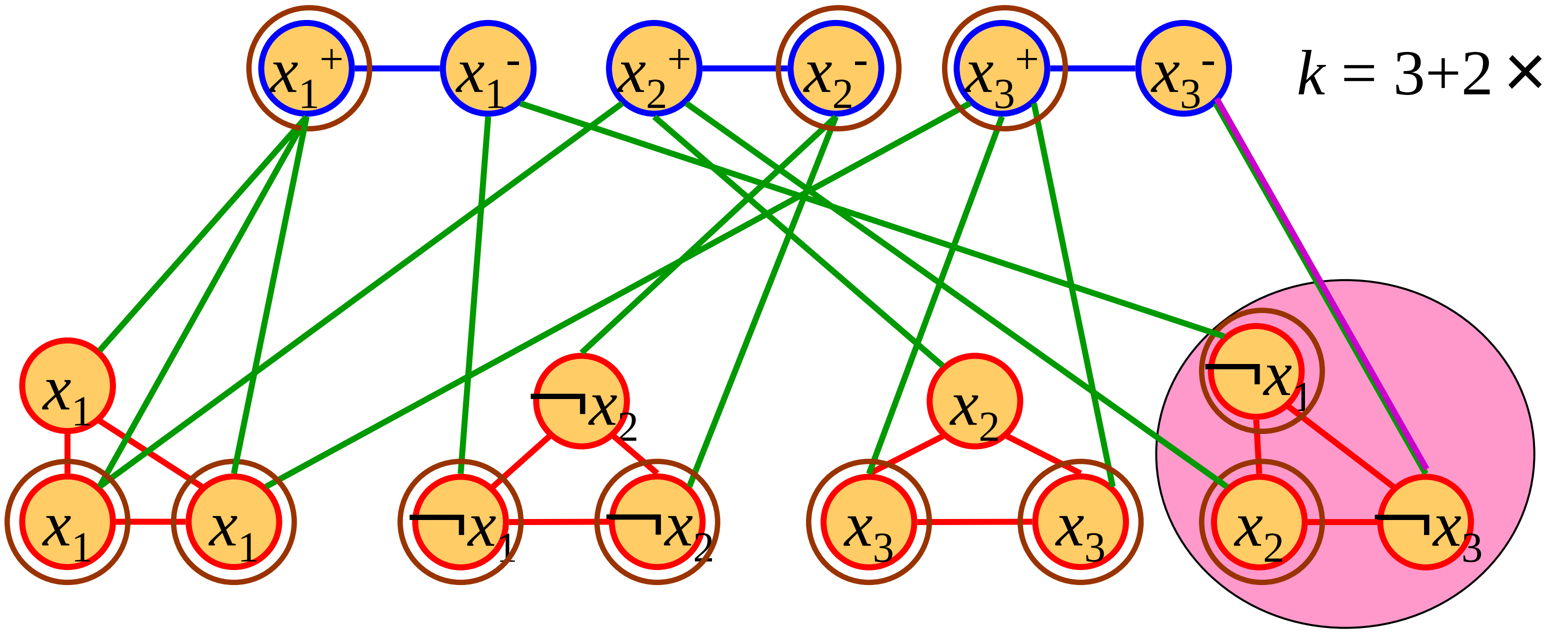
$k = 4+2\times3=10$

QED.

充足できない例:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3)$$
$$\wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G



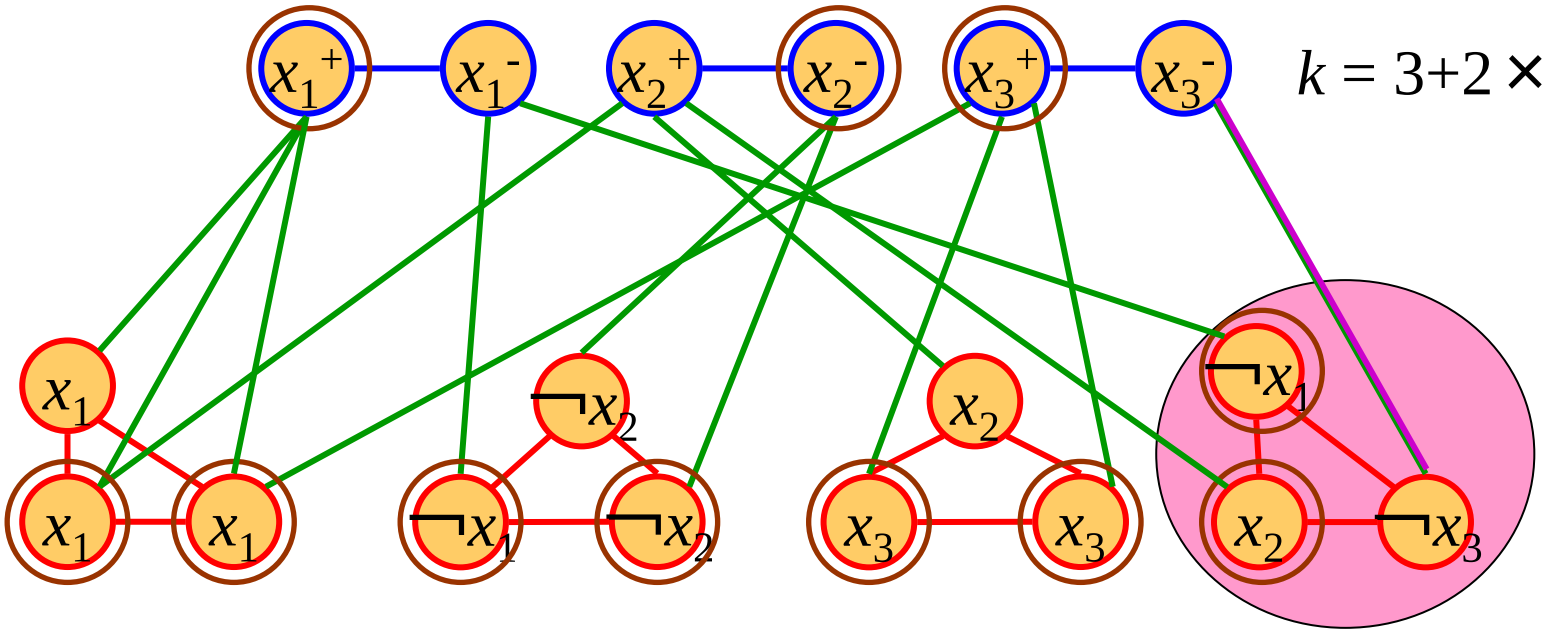
$k = 3+2 \times 4=11$

充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは k+1以上になる。

Unsatisfiable example:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G



When F is unsatisfiable, it contains at least one clause such that each literal is not covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain three literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least k+1.

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

次数: 頂点に付随する辺の本数

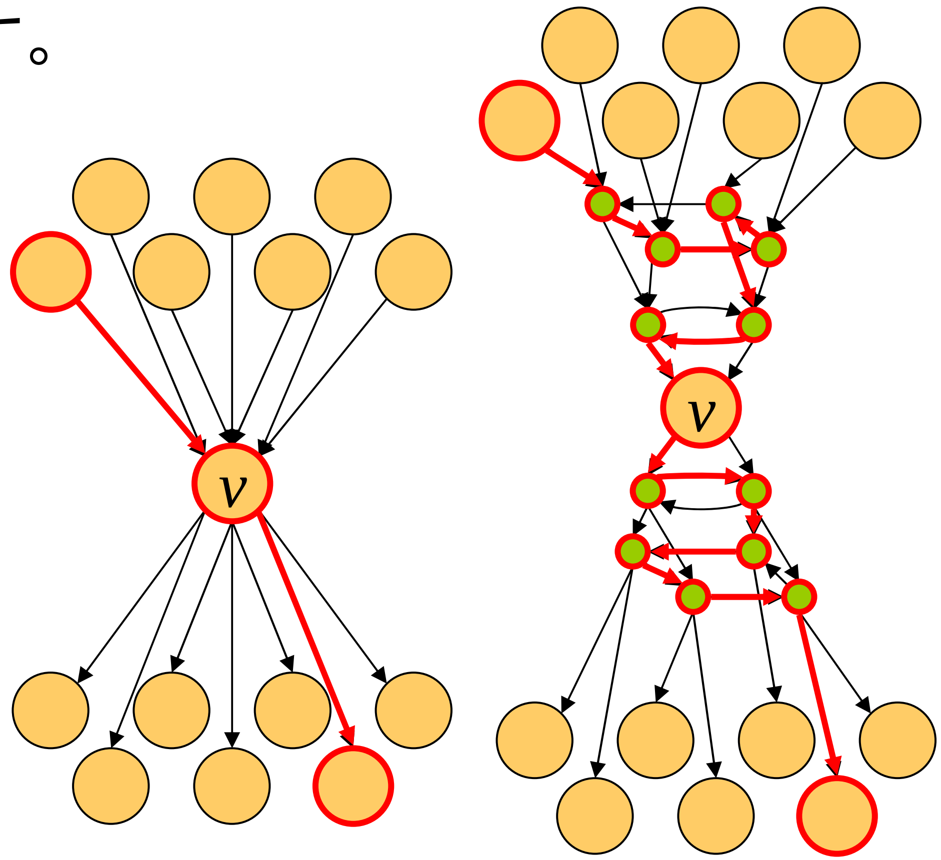
[証明] (上記の問題を$\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$と略記する)

$\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$ が$\mathcal{NP}$に属するのは、DHAMが$\mathcal{NP}$に属することから自明。したがって完全性を示せばよい。
$\mathrm{DHAM} \leq_m^P \mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合)と(出ていく辺集合)を右図の`gadget'で置き換える

左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。



Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$) is $\mathcal{NP}$-complete

degree: the number of edges incident to a vertex

[Proof]

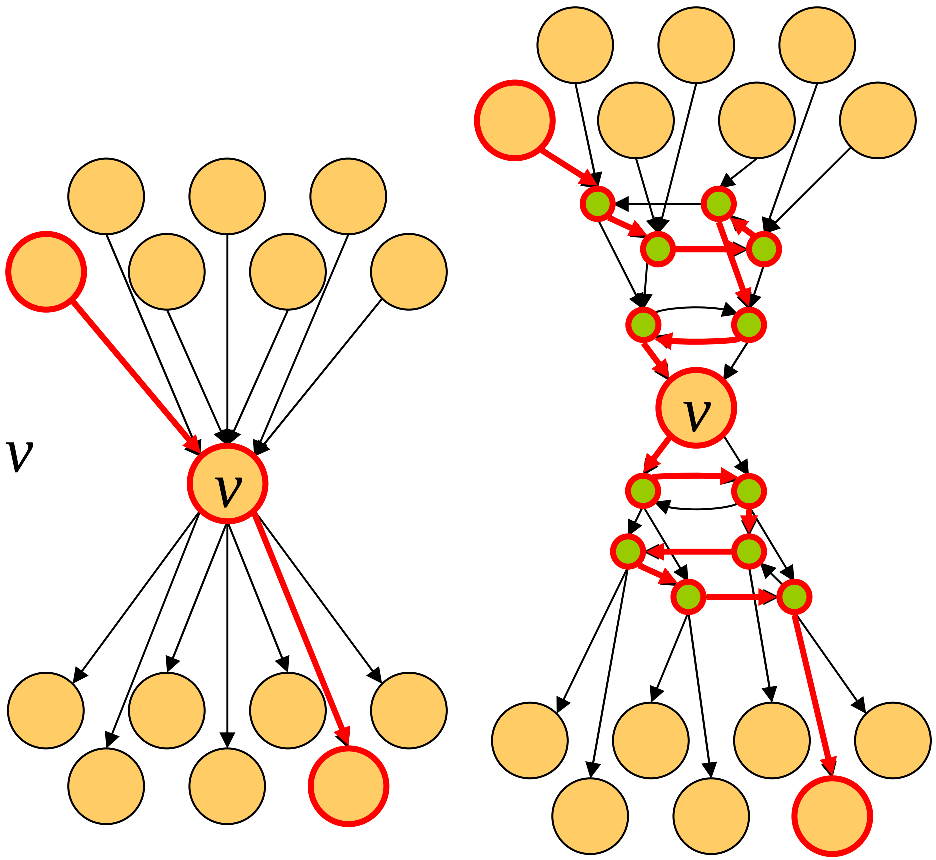
Since DHAM $\in \mathcal{NP}$, $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5} \in \mathcal{NP}$.

We DHAM $\leq_m^P$ $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$.

Idea:

Replace the set of "arcs to v" and the set of "arcs from v" by a right 'gadget'.

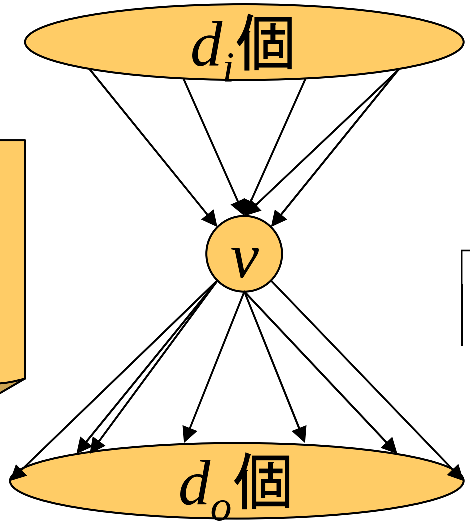
A Hamiltonian cycle through *v* on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through *v* on the resultant graph.

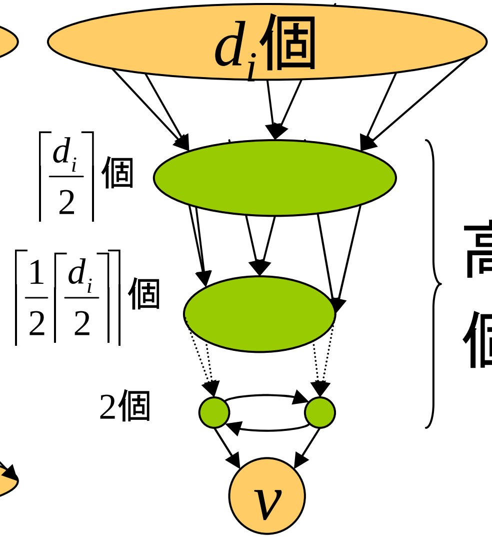


定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

アイデア:

ポイント:
- 各閉路は上から下
- 各頂点は次数≦5





高さ: $O(\log d_i)$
個数: $O(d_i)$

[証明(概要)]

与えられたグラフGの次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

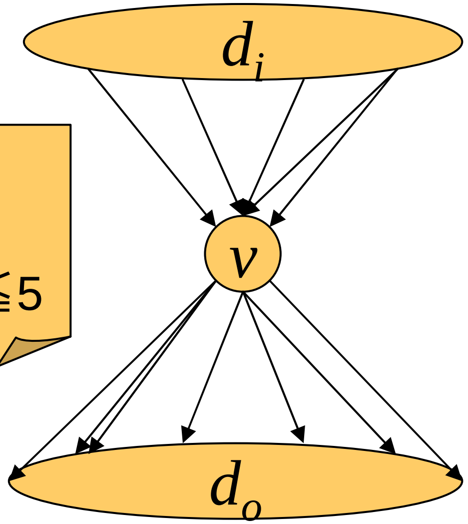
1. 元のグラフGがn頂点m辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフG'は $O(n+m)$頂点 $O(m)$辺となる。したがって上記の還元はGの大きさの多項式時間で可能。
2. またG'のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. Gがハミルトン閉路をもつ⇔G'がハミルトン閉路を持つ

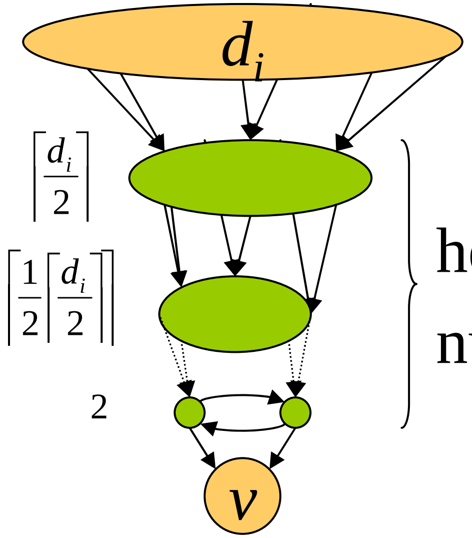
QED.

Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$) is $\mathcal{NP}$-complete

Idea:

Points:
- Up to down via cycle
- Each vertex has deg≦5





height: $O(\log d_i)$

number: $O(d_i)$

[Proof (sketch)]

For each vertex v of degree≧6, replace the edges around v by the gadget.

1. If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m.
2. Each vertex in G' has degree *at most* 5.
3. G has a Hamiltonian cycle ⇔ G' has a Hamiltonian cycle. QED.

おまけ(Addition)

多くの自然な問題は
- 多項式時間で解けるか
- $\mathcal{NP}$困難か

のどちらかである場合が多い(?)

- Ryuhei Uehara, Shigeki Iwata:
  Generalized Hi-Q is $\mathcal{NP}$-complete,
  The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- Peisen Zhang, Huitao Sheng, Ryuhei Uehara:
  A Double Classification Tree Search Algorithm for
  Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- Sachio Teramoto, Erik D. Demaine, Ryuhei Uehara:
  Voronoi Game on Graphs and Its Complexity,
  2nd IEEE Symp. on Computational Intelligence and Games,
  p.265-271, 2006.
- Ryuhei Uehara, Sachio Teramoto:
  Computational Complexity of a Pop-up Book,
  4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006.
- Ryuhei Uehara:
  Simple Geometrical Intersection Graphs,
  3rd Workshop on Algorithms and Computation,
  Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4921, p.25-33, 2008.

残りの予定(Schedule)

- 4/24 (Thu):
  - レポートの回収(report submission)
- 4/24 Office Hour:
  - レポートの解答と解説(Answers and comments for the report)
- 4/28: 休講(Canceled)
- 5/1: 中間試験(Mid term exam)
  - 4題40点満点
  - 持ち込み不可(No text, No notes, …)