計算量クラス間の定義を概観すると…

クラス$\mathcal{P}$の定義(5章)
集合Lがクラス$\mathcal{P}$に入る ⇔
以下を満たす多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x\in\Sigma^*$で$x\in L\Leftrightarrow R(x)$

クラス$\mathcal{NP}$の定義(定義5.2)
集合Lがクラス$\mathcal{NP}$に入る ⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x\in\Sigma^*$で$x\in L\Leftrightarrow \exists w\in\Sigma^*:|w|\leqq q(|x|)[R(x,w)]$

クラスco-$\mathcal{NP}$の定義(定理5.5)
集合Lがクラスco-$\mathcal{NP}$に入る ⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x\in\Sigma^*$で$x\in L\Leftrightarrow \forall w\in\Sigma^*:|w|\leqq q(|x|)[R(x,w)]$

Observation of the definitions of the classes…

Def: Class $\mathcal{P}$ (Chapter 5)
Set L is in the class $\mathcal{P}$ ⇔
There exists a poly-time computable predicate R such that
for each $x\in\Sigma^*$, $x\in L\Leftrightarrow R(x)$

Def: Class $\mathcal{NP}$ (Def 5.2)
Set L is in the class $\mathcal{NP}$ ⇔
There exists a poly q and a poly-time computable pred. R s.t.
for each $x\in\Sigma^*$, $x\in L\Leftrightarrow \exists w\in\Sigma^*:|w|\leqq q(|x|)[R(x,w)]$

Def: Class co-$\mathcal{NP}$ (Theorem 5.5)
Set L is in the class co-$\mathcal{NP}$ ⇔
There exists a poly q and a poly-time computable pred. R s.t.
for each $x\in\Sigma^*$, $x\in L\Leftrightarrow \forall w\in\Sigma^*:|w|\leqq q(|x|)[R(x,w)]$

定理5.9.
(1) $\mathcal{NP}\subseteq$ co-$\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$
(2) co-$\mathcal{NP}\subseteq\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$
(3) $\mathcal{NP}\neq$ co-$\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$.

補注: (3)より, $\mathcal{NP}\neq$co-$\mathcal{NP}$の証明は, $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$の証明より難しい.

証明: (1) $\mathcal{NP}\subseteq$ co-$\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$ ((2)の証明も同様)
任意の$L\in$co-$\mathcal{NP}$に対して$L\in\mathcal{NP}$が示せれば, co-$\mathcal{NP}\subseteq\mathcal{NP}$が証明できるので, 仮定の$\mathcal{NP}\subseteq$ co-$\mathcal{NP}$と合わせて$\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$が言える.

$L\in$ co-$\mathcal{NP}\rightarrow\overline{L}\in\mathcal{NP}$ (定義5.3より)
$\rightarrow\overline{L}\in$ co-$\mathcal{NP}$ ($\mathcal{NP}\subseteq$ co-$\mathcal{NP}$より)
$\rightarrow L\in\mathcal{NP}$ (定義5.3と$\overline{\overline{L}}=L$より)

Theorem 5.9
(1) $\mathcal{NP}\subseteq$ co-$\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$
(2) co-$\mathcal{NP}\subseteq\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$
(3) $\mathcal{NP}\neq$ co-$\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$.

Note: from (3) the proof for $\mathcal{NP}\neq$ co-$\mathcal{NP}$ is harder than that for $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$.

Proof: (1) $\mathcal{NP}\subseteq$ co-$\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$ (proof of (2) is similar)
Since co-$\mathcal{NP}\subseteq\mathcal{NP}$ is shown if we prove $L\in\mathcal{NP}$ for any $L\in$ co-$\mathcal{NP}$
Combining it with the assumption $\mathcal{NP}\subseteq$ co-$\mathcal{NP}$, we have $\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$ and so

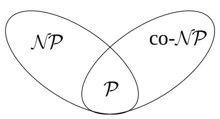
$L\in$ co-$\mathcal{NP}\rightarrow\overline{L}\in\mathcal{NP}$ (by Definition 5.3)
$\rightarrow\overline{L}\in$ co-$\mathcal{NP}$ ($\mathcal{NP}\subseteq$ co-$\mathcal{NP}$)
$\rightarrow L\in\mathcal{NP}$ (Definition 5.3 and $\overline{\overline{L}}=L$)

(3) $\mathcal{NP}\neq$ co-$\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$.

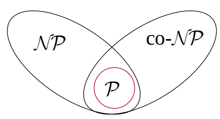
対偶: $\mathcal{P}=\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$

$\mathcal{P}=\mathcal{NP}$と仮定すると, すべてのLに対し
$L\in\mathcal{NP}\leftrightarrow L\in\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}=\mathcal{NP}$より)
$\leftrightarrow\overline{L}\in\mathcal{P}$ (演習問題5.5)
$\leftrightarrow\overline{L}\in\mathcal{NP}$ ($\mathcal{P}=\mathcal{NP}$より)
$\leftrightarrow L\ (=\overline{\overline{L}})\in$ co-$\mathcal{NP}$ (定義5.3より)
$\therefore\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$ 証明終

$\mathcal{NP}\neq$co-$\mathcal{NP}$が正しいと



or

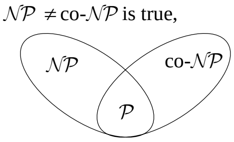


(3) $\mathcal{NP}\neq$ co-$\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$.

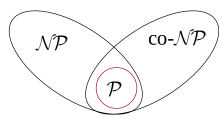
Contraposition: $\mathcal{P}=\mathcal{NP}\rightarrow\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$

If we assume $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$, for any L we have
$L\in\mathcal{NP}\leftrightarrow L\in\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}=\mathcal{NP}$)
$\leftrightarrow\overline{L}\in\mathcal{P}$ (Exercise 5.5)
$\leftrightarrow\overline{L}\in\mathcal{NP}$ ($\mathcal{P}=\mathcal{NP}$)
$\leftrightarrow L\ (=\overline{\overline{L}})\in$ co-$\mathcal{NP}$ (Definition 5.3)
$\therefore\mathcal{NP}=$ co-$\mathcal{NP}$ Q.E.D.

If $\mathcal{NP}\neq$co-$\mathcal{NP}$ is true,



or



第6章 多項式時間計算可能性の分析

6.1. 多項式時間還元可能性

定義6.1:
AとBを任意の集合とする．
(1) 関数 h: $A \rightarrow B$: 多項式時間還元(polynomial-time reduction)
$\Leftrightarrow$
(a) h はΣ^*からΣ^*への全域的関数
(b) $x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
(c) h は多項式時間計算可能．

(2) AからBへの多項式時間還元が存在するとき，
AはBへ多項式時間還元可能という(polynomial time reducible).
このとき，次のように書く: $\boxed{A \le_m^P B}$

1/14

Chapter 6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Def.6.1:
Let A and B be arbitrary sets.
(1) function h: $A \rightarrow B$: polynomial-time reduction
$\Leftrightarrow$
(a) h is a total function from Σ^* onto Σ^*
(b) $x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
(c) h is polynomial-time computable.

(2) When there is a polynomial-time reduction from A to B,
we say A is polynomial-time reducible to B.
Then, we denote by $\boxed{A \le_m^P B}$

$A \le_m^P B$ 多項式時間の範囲内では，Aの難しさ $\le$ Bの難しさ

定理6.1. $A \le_m^P B$ のとき，
(1) $B \in \mathcal{P} \rightarrow A \in \mathcal{P}$.
(2) $B \in \mathcal{NP} \rightarrow A \in \mathcal{NP}$.
(3) $B \in$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \in$ co-$\mathcal{NP}$.
(4) $B \in \mathcal{EXP} \rightarrow A \in \mathcal{EXP}$.

補注:クラス$\mathcal{E}$は例外．一般には，$B \in \mathcal{E} \rightarrow A \in \mathcal{E}$とはならない．

例6.2: ONE$\equiv\{1\}$と定義するとき，クラス$\mathcal{P}$のすべての集合Lについて $L \le_m^P$ ONE
が成り立つ． $h(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \in L\text{のとき}, \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$
と定義すると，(1) hはΣ^*からΣ^*への全域的関数．
(2) $x \in \Sigma^*[x \in L \leftrightarrow h(x) \in \text{ONE}]$
(3) hは多項式時間計算可能($L \in \mathcal{P} \rightarrow x \in L$の判定も多項式時間内)

2/14

$A \le_m^P B$ within polynomial time, hardness of A $\le$ that of B

定理6.1 $A \le_m^P B$ leads to,
(1) $B \in \mathcal{P} \rightarrow A \in \mathcal{P}$.
(2) $B \in \mathcal{NP} \rightarrow A \in \mathcal{NP}$.
(3) $B \in$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \in$ co-$\mathcal{NP}$.
(4) $B \in \mathcal{EXP} \rightarrow A \in \mathcal{EXP}$.

Note: class $\mathcal{E}$ is exceptional. Generally, $B \in \mathcal{E} \rightarrow A \in \mathcal{E}$ is not true.

Ex.6.2: If we define ONE$\equiv\{1\}$, for each set L in $\mathcal{P}$ we have
$L \le_m^P$ ONE
If we define $h(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } x \in L, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

(1) h is a total function from Σ^* onto Σ^*.
(2) $x \in \Sigma^*[x \in L \leftrightarrow h(x) \in \text{ONE}]$
(3) h is polynomial-time computable(so is computation $L \in \mathcal{P} \rightarrow x \in L$)

定理6.2: A, B, C: 任意の集合
(1) $A \le_m^P A$
(2) $A \le_m^P B \wedge B \le_m^P C \rightarrow A \le_m^P C$

定義: $A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \le_m^P B \wedge B \le_m^P A$
$\equiv_m^P$ は同値関係

3/14

Theorem 6.2: A, B, C: arbitrary sets
(1) $A \le_m^P A$
(2) $A \le_m^P B \wedge B \le_m^P C \rightarrow A \le_m^P C$

Def: $A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \le_m^P B \wedge B \le_m^P A$
$\equiv_m^P$ is an equivalence relation.

命題論理式の充足可能性問題の間の関係

2SAT （命題論理式充足性問題：二和積形式）
3SAT （命題論理式充足性問題：三和積形式）
SAT （命題論理式充足性問題）
ExSAT （拡張命題論理式充足性問題）

$2\mathrm{SAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT}$

- •高々k個…自明
- •ちょうどk個…
  - ➢同じリテラルを使ってよいなら簡単。
  - ➢だめなら…考えてみよう！

同様に，

$3\mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$

$2\mathrm{SAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$ (6.1)

ここで

$\mathrm{ExSAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT}$

であることを示せると，

$3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

となる．

Relation among satisfiability problems of propositional expressions

2SAT (propositional satisfiability problem)
3SAT
SAT
ExSAT (extended propositional satisfiability problem)

$2\mathrm{SAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT}$

- •at most k…trivial
- •exactly k…
  - ➢easy if you can repeat the same literal.
  - ➢the other case … good exercise!

Similarly,

$3\mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$

$2\mathrm{SAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$ (6.1)

Here, if we can show

$\mathrm{ExSAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT}$

then we have

$3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

例6.3: ExSATから3SATへの還元

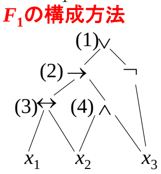
$$E_1(x_1,x_2,x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \to [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$

$$F_1(x_1,x_2,x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \to U_4]] \wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

このとき，$[E_1$が充足可能$] \leftrightarrow [F_1$が充足可能$]$ (6.2)

F_1は三和積形式に直しやすい形になっている．

F_1の構成方法



(1)$V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$
(2)$V_2 \equiv [V_3 \to V_4]$
(3)$V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$
(4)$V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$

F_1を構成するために，$V_i \to U_i$とし，V_iの定義式を∧で結ぶ

Ex. 6.3: Reduction from ExSAT to 3SAT

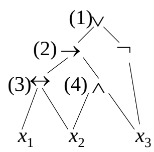
$$E_1(x_1,x_2,x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \to [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$

$$F_1(x_1,x_2,x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \to U_4]] \wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

Then, $[E_1$ is satisfiable$] \leftrightarrow [F_1$ is satisfiable$]$ (6.2)

F_1 is easier to be converted to 3SAT form.

How to construct F_1



(1)$V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$
(2)$V_2 \equiv [V_3 \to V_4]$
(3)$V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$
(4)$V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$

To construct **F_1** we let $V_i \to U_i$, and connect expressions of V_i by ∧

F_1 の構成方法より，
(1)各U_i の値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としない限り，F_1は真にはならない．
(2)各U_iの値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としたとき，$F_1 = E_1$

上の性質が成り立つことは，帰納法を用いるなどして証明可能．
証明は省略．

三和積形式への変換

$a \to b = \neg a \vee b$

$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a) = [\neg a \vee b] \wedge [\neg b \vee a]$であることを用いる．

$$\begin{aligned} U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg[U_2 \vee \neg x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2] \end{aligned}$$

他も同様．
よって，すべて三和積形式に変形できることがわかる．

From the construction of F_1
(1) F_1 is never true unless each U_i is $V_i(x_1, x_2, x_3)$.
(2) If each U_i is $V_i(x_1, x_2, x_3)$, we have $F_1 = E_1$

The above properties are proved by using induction.
proof is omitted.

Conversion to 3SAT form

$a \to b = \neg a \vee b$

$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a) = [\neg a \vee b] \wedge [\neg b \vee a]$: useful relations

$$\begin{aligned} U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg[U_2 \vee \neg x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2] \end{aligned}$$

Others are similar.
Thus, every 3SAT form is converted.

7/14

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

定義6.2: 計算量クラス$\mathcal{C}$に対し，集合Aが次の条件を満たすとき，それを（$\leq_m^P$の下で）$\mathcal{C}$-完全という．

(a) $\forall L \in \mathcal{C}\ [L \leq_m^P A]$

(b) $A \in \mathcal{C}$

補注：条件(a)を満たす集合は$\mathcal{C}$-困難．

7/14

6.2.Completeness based on Polynomial-time Reducibility

6.2.1. Definition of Completeness and its Basic Properties

Def.6.2: For a class $\mathcal{C}$, if a set A satisfies the following conditions, then it is called $\mathcal{C}$-complete (under $\leq_m^P$)

(a) $\forall L \in \mathcal{C}\ [L \leq_m^P A]$

(b) $A \in \mathcal{C}$

Note: Sets satisfying the condition (a) are called $\mathcal{C}$-hard.

8/14

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

例6.5. クラス$\mathcal{NP}$の完全集合の例

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VCなど

クラス$\mathcal{EXP}$の完全集合

EVAL-IN-E, HALT-IN-Eなど

EVAL-IN-E:

入力：$< a, x, \bar{t} >$

a：1入力プログラムのコード, $x \in \Sigma^*, \bar{t} \geq 0$

出力：$eval\text{-}in\text{-}time(a, x, 2^{\bar{t}}) = accept$?

8/14

6.2.Completeness based on Polynomial-time Reducibility

6.2.1. Definition of Completeness and its Basic Properties

Ex.6.5. Examples of $\mathcal{NP}$-complete sets

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VC, etc

$\mathcal{EXP}$-complete sets

EVAL-IN-E, HALT-IN-E, etc.

EVAL-IN-E:

Input: $< a, x, \bar{t} >$

a: the code of a program with 1 input, $x \in \Sigma^*, \bar{t} \geq 0$

Output: $eval\text{-}in\text{-}time(a, x, 2^{\bar{t}}) = accept$?

9/14

定理6.3. 任意の$\mathcal{C}$-困難集合（含：$\mathcal{C}$-完全集合）Aに対し，

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \notin$ co-$\mathcal{NP}$

(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

証明：

(1) Bを任意の$\mathcal{C}$集合とすると，Aは$\mathcal{C}$-困難だから，

$B \leq_m^P A$　一方，$A \in \mathcal{P}$の仮定より，$B \in \mathcal{P}$（定理6.1）

(2), (3), (4)も同様

9/14

Theorem 6.3. For any $\mathcal{C}$-hard (or $\mathcal{C}$-complete) set A,

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$　　CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$　　CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$　　CP: $\mathcal{C} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \notin$ co-$\mathcal{NP}$

(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$　　CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

Proof:　　CP: contraposition

(1) Let B be any $\mathcal{C}$-set. Then, since A is $\mathcal{C}$-hard,

$B \leq_m^P A$ and by the assumption $A \in \mathcal{P}$ we have $B \in \mathcal{P}$ (Th. 6.1)

(2), (3), (4) are similar.

定理6.3. 任意の$\mathcal{C}$-困難集合（含：$\mathcal{C}$-完全集合）Aに対し，
(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$
(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$
(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \notin$ co-$\mathcal{NP}$
(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

例6.6. 定理6.3の意味（クラス$\mathcal{NP}$）
Aを$\mathcal{NP}$-完全集合とする.

定理5.9.
(1) $\mathcal{NP} \subseteq$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{NP}$

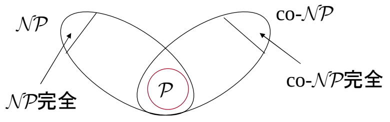
定理6.3(1)の対偶より，
$\mathcal{NP} \neq \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$
定理6.3(3)の対偶と定理5.9(1)の対偶より，
$A \notin$ co-$\mathcal{NP}$
つまり，$\mathcal{NP}$-完全集合は$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$である限り，
多項式時間では認識できない.

Theorem 6.3. For any $\mathcal{C}$-hard (or $\mathcal{C}$-complete) set A,
(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$　　CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$
(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$　　CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$
(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$　　CP: $\mathcal{C} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \notin$ co-$\mathcal{NP}$
(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$　　CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

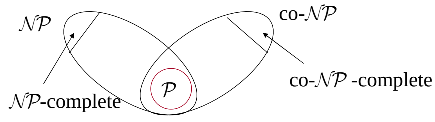
Theorem 5.9.
(1) $\mathcal{NP} \subseteq$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{NP}$

Ex.6.6: Meaning of Theorem 6.3（class $\mathcal{NP}$）
Let A be $\mathcal{NP}$-complete set.
By the contraposition of Theorem 6.3(1) we have
$\mathcal{NP} \neq \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$
By the contraposition of Theorem 6.3(3) and that of Theorem 5.9(1),
$A \notin$ co-$\mathcal{NP}$
That is, $\mathcal{NP}$-complete sets are $\mathcal{NP}$-sets that cannot be recognized in polynomial time unless $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

$\mathcal{NP}$-完全集合は$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$である限り，$\mathcal{NP} \cap$ co-$\mathcal{NP}$には入らない$\mathcal{NP}$集合である.



$\mathcal{NP}$-compete sets are $\mathcal{NP}$-sets that do not belong to $\mathcal{NP} \cap$ co-$\mathcal{NP}$ unless $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.



例6.7. 定理6.3の意味（クラス$\mathcal{EXP}$）

Dを$\mathcal{EXP}$-完全集合とする.

定理6.3(1)の対偶（$\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$，ここでは$\mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow D \notin \mathcal{P}$)
$\mathcal{P} \neq \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{P}$ $(\because \mathcal{P} \subseteq \mathcal{EXP}) \rightarrow D \notin \mathcal{P}$
定理6.3(2)の対偶（$\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$,
ここでは$\mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow D \notin \mathcal{NP}$）
$\mathcal{NP} \neq \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{NP}$ $(\because \mathcal{NP} \subseteq \mathcal{EXP}) \rightarrow D \notin \mathcal{NP}$
定理6.3(3)の対偶（$\mathcal{C} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \notin$ co-$\mathcal{NP}$,
ここでは$\mathcal{EXP} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow D \notin$ co-$\mathcal{NP}$）
co-$\mathcal{NP} \neq \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{EXP} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow D \notin$ co-$\mathcal{NP}$
ところが定理5.7から $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{EXP}$ であるから，$D \notin \mathcal{P}$.

$\mathcal{EXP}$-完全集合は多項式時間では計算不可能.

Ex. 6.7. Meaning of Theorem 6.3（class $\mathcal{EXP}$）

Let D be an $\mathcal{EXP}$-complete set.

Contraposition of Theorem 6.3(1)
（$\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$， where $\mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow D \notin \mathcal{P}$）
$\mathcal{P} \neq \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{P}$ $(\because \mathcal{P} \subseteq \mathcal{EXP}) \rightarrow D \notin \mathcal{P}$
Contraposition of Theorem 6.3(2)（$\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$,
Here, $\mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow D \notin \mathcal{NP}$）
$\mathcal{NP} \neq \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{EXP} \not\subset \mathcal{NP}$ $(\because \mathcal{NP} \subseteq \mathcal{EXP}) \rightarrow D \notin \mathcal{NP}$
Contraposition of Theorem 6.3(3)（$\mathcal{C} \notin$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \not\subset$ co-$\mathcal{NP}$,
here, $\mathcal{EXP} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow D \notin$ co-$\mathcal{NP}$）
co-$\mathcal{NP} \neq \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{EXP} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow D \notin$ co-$\mathcal{NP}$
But, by Theorem 5.7, since we know $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{EXP}$, we have $D \notin \mathcal{P}$.

$\mathcal{EXP}$-complete sets are not computable in polynomial time.

13/14

定理6.4. A: 任意の$\mathcal{C}$-完全集合
すべての集合Bに対し,
(1) $A \le_m^P B \rightarrow B$は$\mathcal{C}$-困難.
(2) $A \le_m^P B \wedge B \in \mathcal{C} \rightarrow B$は$\mathcal{C}$-完全.

証明:
定義6.2より, $\forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P A]$
定理6.2より, $L \le_m^P A \wedge A \le_m^P B \rightarrow L \le_m^P B$
したがって, $\forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P B]$

すなわち, Bは$\mathcal{C}$-困難.

13/14

Theorem 6.4. A: any $\mathcal{C}$-complete set
For any set B we have
(1) $A \le_m^P B \rightarrow B$ is $\mathcal{C}$-hard.
(2) $A \le_m^P B \wedge B \in \mathcal{C} \rightarrow B$ is $\mathcal{C}$-complete.

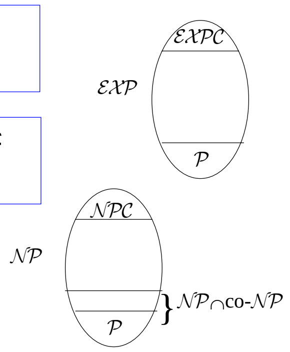
Proof:
By Def. 6.2 $\forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P A]$
By Theorem 6.2, $L \le_m^P A \wedge A \le_m^P B \rightarrow L \le_m^P B$
Therefore, $\forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P B]$
That is, B is $\mathcal{C}$-hard.

14/14

$\mathcal{EXPC} \equiv \{L: L$は$\mathcal{EXP}$-完全$\}$
$\mathcal{NPC} \equiv \{L: L$は$\mathcal{NP}$-完全$\}$
とすると, 次の定理が成り立つ.

定理6.5.
(1) $\mathcal{EXPC} \cap \mathcal{P} = \phi$
(2) $\mathcal{EXP} - (\mathcal{EXPC} \cup \mathcal{P}) \neq \phi$

定理6.6: $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$**を仮定すると**
(1) $\mathcal{NPC} \cap \mathcal{P} = \phi$
(2) $\mathcal{NP} - (\mathcal{NPC} \cup \mathcal{P}) \neq \phi$

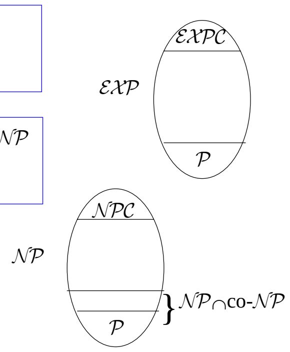


14/14

$\mathcal{EXPC} \equiv \{L: L$ is $\mathcal{EXP}$-complete$\}$
$\mathcal{NPC} \equiv \{L: L$ is $\mathcal{NP}$-complete$\}$
Then, we have the following theorems.

Theorem 6.5.
(1) $\mathcal{EXPC} \cap \mathcal{P} = \phi$
(2) $\mathcal{EXP} - (\mathcal{EXPC} \cup \mathcal{P}) \neq \phi$

Theorem 6.6: Assuming $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$
(1) $\mathcal{NPC} \cap \mathcal{P} = \phi$
(2) $\mathcal{NP} - (\mathcal{NPC} \cup \mathcal{P}) \neq \phi$



残りの予定(Schedule)

- 4/24 (Thu):
  - レポートの回収(report submission)
- 4/24 Office Hour:
  - レポートの解答と解説(Answers and comments for the report)
- 4/28: 休講(Canceled)
- 5/1: 中間試験(Mid term exam)
  - 4題40点満点
  - 持ち込み不可(No text, No notes, …)