6.2.2. 完全性の証明

(NP)完全性の証明方法
(I) 定義通りに[すべてのLについて]示す
(II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9(≒Cookの定理(SATでTMを模倣))

3SATなどは、形式が一様なので扱いやすい

基本的には…
1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する

→とても大変(手間がかかる)

(II)の例: 例6.4(3SAT $\leq^P_m$ DHAM), 定理6.10, …

DHAMは一般のグラフ上でNP完全

DHAMは平面グラフに限定してもNP完全
DHAMは「頂点の次数＝3」に限定してもNP完全
DHAMは2部グラフに限定してもNP完全…

6.2.2. 完全性の証明

定理6.7: EVAL-IN-EはEXP-完全

証明：例5.6より, EVAL-IN-E ∈ EXP, よって,
$\forall L \in$ EXP[$L \leq^P_m$ EVAL-IN-E]
を示せばよい.
L：任意のEXP集合とする.
Lを$2^{p(l)}$時間で認識するプログラムが存在($p(n)$は多項式)
そのプログラムを**L**とする. このとき,
$x \in L \leftrightarrow$ **L**(x)=accept
time_**L** $(x) \leq 2^{p(|x|)}$
LからEVAL-IN-Eへの還元として次の関数hを考える.
$h(x) \equiv <\ulcorner \mathbf{L} \urcorner, x, \overline{p(|x|)}>$ for $\forall x \in \Sigma^*$
すると, hは全域的で, 多項式時間計算可能.

また, すべての$x \in \Sigma^*$に対し

$x \in L \leftrightarrow$ **L** (x) = accept
$\leftrightarrow$ eval($\ulcorner \mathbf{L} \urcorner$, x) = accept
$\leftrightarrow$ eval_in_time($\ulcorner \mathbf{L} \urcorner$, x, $\overline{2^{p(|x|)}}$) = accept
$\leftrightarrow$ $<\ulcorner \mathbf{L} \urcorner$, x, $\overline{2^{p(|x|)}}$ $> \in$ EVAL-IN-E
$\leftrightarrow$ $h(x) \in$ EVAL-IN-E

ゆえに, hはLからEVAL-IN-Eへの多項式時間還元.

$\therefore L \leq^P_m$ EVAL-IN-E for $\forall L \in$ EXP

すなわち, EVAL-IN-EはEXP-完全.

証明終

定理6.8.
(1) EVAL-IN-E $\notin$ P
(2) EVAL-IN-EはNP-困難
(3) HALT-IN-EはEXP-完全.

証明:
(1) EVAL-IN-EはEXP-完全集合で, EXP-完全集合 $\notin$ P.
(2) $\forall L \in$ EXP [$A \leq^P_m$ EVAL-IN-E] と

NP ⊆ EXP より.

定理6.10: 以下にあげる集合はすべてNP-完全
(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
(2) DHAM, VC (3SATからの還元)
(3) KNAP, BIN (3SATからの還元とKNAP $\leq^P_m$ BIN)

(II) NP完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:
1. 3SAT $\leq^P_m$ VC
2. DHAM $\leq^P_m$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度づつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でもNP完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

定理6.10(2) : VC は NP 完全問題

[証明] VC ∈ NP なので、3SAT $\leq^P_m$ VC であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が与えられたとする。
Fから以下の条件を満たすグラフと自然数の組$<G, k>$が
多項式時間で構成できることを示す:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):
1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項C_j=($l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}$)に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

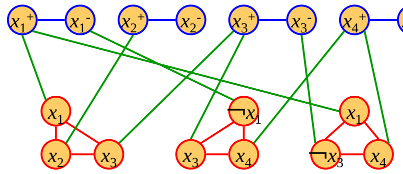
Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項C_j=($l_{i1}\vee l_{i2}\vee l_{i3}$)に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、¬x_i のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



k = 4+2×3=10

Gの構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能 。したがって以下を示せばよい:

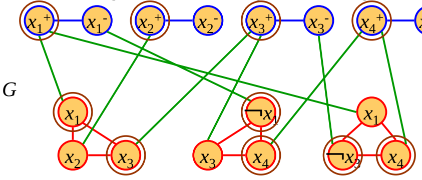
Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

観察:

Gの構成から任意の頂点被覆Sは { x_i^+,x_i^-のどちらかを含む / C_jの3頂点中、最低2つ含む } よって $|S| \geqq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



k = 4+2×3=10

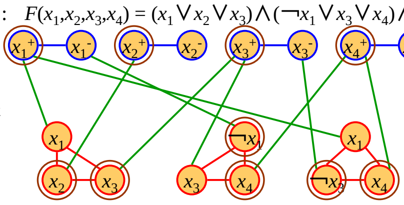
Fを1にする割当が存在する⇒Gがサイズkの頂点被覆を持つ

1. それぞれの変数 x_i が { x_i=1なら x_i^+をSに入れる / x_i=0なら x_i^-をSに入れる }
2. それぞれの項C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3}) は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1},x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2},l_{i3})を S に入れる。

⇒ **観察** より、Sはサイズkの頂点被覆になる。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



k = 4+2×3=10

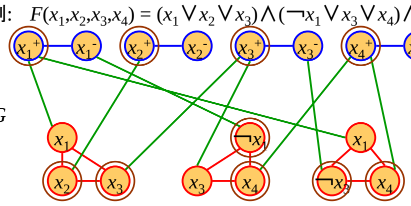
Gがサイズkの頂点被覆を持つ⇒ Fを1にする割当が存在する

1. **観察** より、被覆Sは項から$2m$個、変数からn個の頂点を含む。
2. さらに各変数x_iについてはx_i^+かx_i^-の一方しか、各項C_jについてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。
3. よって各項C_jはSに含まれないリテラルl_iを含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

⇒ (x_i^+がSに含まれるなら x_i=1 / x_i^-がSに含まれるなら x_i=0) という割当はFを充足する。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



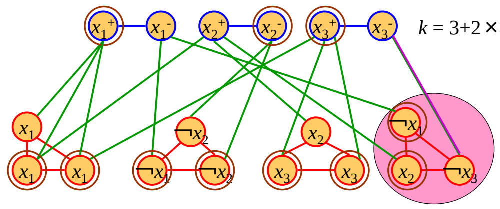
k = 4+2×3=10

QED.

充足できない例:

$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1\vee x_1\vee x_1)\wedge(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_2)\wedge(x_2\vee x_3\vee x_3)$
$\wedge(\neg x_1\vee x_2\vee\neg x_3)$

G



k = 3+2×4=11

充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは k+1以上になる。

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は NP 完全問題

次数: 頂点に付随する辺の本数

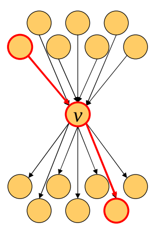
[証明] (上記の問題をDHAM$_{\leq 5}$と略記する)

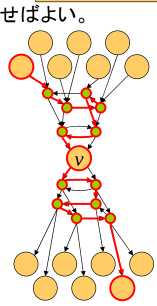
DHAM$_{\leq 5}$ がNPに属するのは、DHAMがNPに属することから自明。したがって完全性を示せばよい。DHAM$\leq_m^P$ DHAM$_{\leq 5}$を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合)と(出ていく辺集合)を右図の`gadget'で置き換える

左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。



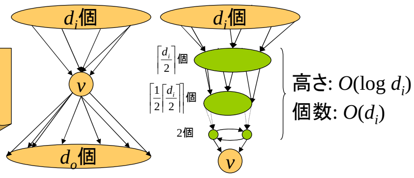


13/13

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は NP 完全問題

アイデア:

ポイント:
- 各閉路は上から下
- 各頂点は次数≦5



[証明(概要)]

与えられたグラフGの次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

1. 元のグラフGがn頂点m辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフG'は $O(n+m)$頂点 $O(m)$辺となる。したがって上記の還元はGの大きさの多項式時間で可能。
2. またG'のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. Gがハミルトン閉路をもつ⇔G'がハミルトン閉路を持つ　QED.