6.2.2. 完全性の証明

(NP)完全性の証明方法
(I) 定義通りに[すべての*L*]について示す
(II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9(≒Cookの定理(SATでTMを模倣))

基本的には…
1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する

→とても大変(手間がかかる)

3SATなどは、形式が一様なので扱いやすい

(II)の例: 例6.4(3SAT $\leq_m^P$ DHAM), 定理6.10, …

DHAMは一般のグラフ上でNP完全

DHAMは平面グラフに限定してもNP完全
DHAMは「頂点の次数＝3」に限定してもNP完全
DHAMは2部グラフに限定してもNP完全…

6.2.2. 完全性の証明

定理6.7: EVAL-IN-EはEXP-完全

証明：例5.6より，EVAL-IN-E $\in$ EXP, よって，

$$\forall L \in \mathrm{EXP}[\, L \le_m^P \mathrm{EVAL\text{-}IN\text{-}E}]$$

を示せばよい.

L：任意のEXP集合とする.

Lを$2^{p(l)}$時間で認識するプログラムが存在($p(n)$は多項式)

そのプログラムを**L**とする．このとき,

$x \in L \;\leftrightarrow\; \mathbf{L}(x)=\mathrm{accept}$

$\mathrm{time\_}\mathbf{L}(x) \le 2^{p(|x|)}$

LからEVAL-IN-Eへの還元として次の関数hを考える.

$$h(x) \equiv \langle \ulcorner \mathbf{L} \urcorner, x, \overline{p(|x|)} \rangle \quad \text{for} \quad \forall x \in \Sigma^*$$

すると，hは全域的で，多項式時間計算可能.

また，すべての$x \in \Sigma^*$に対し

$$x \in L \leftrightarrow \mathsf{L}(x) = \text{accept}$$

$$\leftrightarrow \text{eval}(\lceil \mathsf{L} \rceil, x) = \text{accept}$$

$$\leftrightarrow \text{eval\_in\_time}(\lceil \mathsf{L} \rceil, x, \overline{2^{p(|x|)}}) = \text{accept}$$

$$\leftrightarrow \langle \lceil \mathsf{L} \rceil, x, \overline{2^{p(|x|)}} \rangle \in \text{EVAL-IN-E}$$

$$\leftrightarrow h(x) \in \text{EVAL-IN-E}$$

ゆえに，hはLからEVAL-IN-Eへの多項式時間還元.

$$\therefore L \leq_m^P \text{EVAL-IN-E} \quad \text{for } \forall L \in \text{EXP}$$

すなわち，EVAL-IN-EはEXP-完全.

証明終

定理6.8.

(1) EVAL-IN-E $\notin$ P
(2) EVAL-IN-EはNP-困難
(3) HALT-IN-EはEXP-完全.

証明:
(1) EVAL-IN-EはEXP-完全集合で, EXP-完全集合 $\notin$ P.
(2) $\forall L \in$ EXP $[A \leq_m^P$ EVAL-IN-E$]$ と

NP $\subseteq$ EXP より.

定理6.10: 以下にあげる集合はすべてNP-完全
(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
(2) DHAM, VC (3SATからの還元)
(3) KNAP, BIN (3SATからの還元とKNAP $\le_m^P$ BIN)

(II) NP完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:
1. 3SAT $\le_m^P$ VC
2. DHAM $\le_m^P$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度づつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でもNP完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

定理6.10(2) : VC は NP 完全問題

[証明] VC ∈ NP なので、3SAT $\le_m^P$ VC であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が与えられたとする。
Fから以下の条件を満たすグラフと自然数の組$\langle G, k\rangle$が多項式時間で構成できることを示す:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

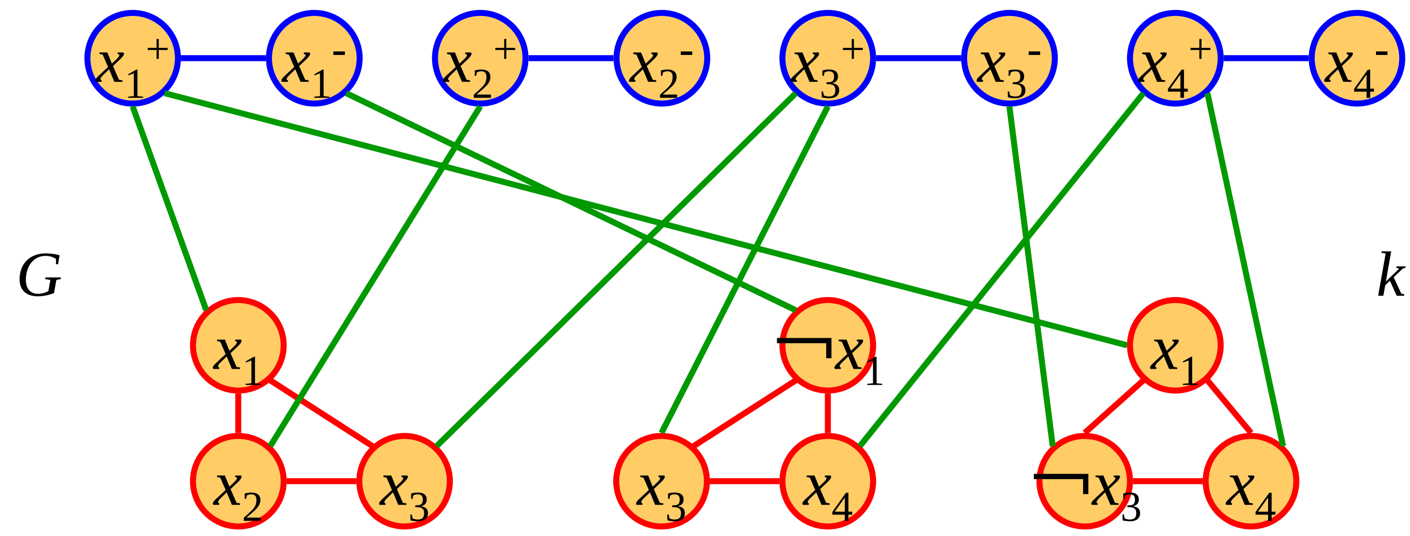
1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1}\lor l_{i2}\lor l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^-と、辺(x_i^+, x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \lor l_{i2} \lor l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1}, x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor x_3 \lor x_4) \land (x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

Gの構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能 。したがって以下を示せばよい:

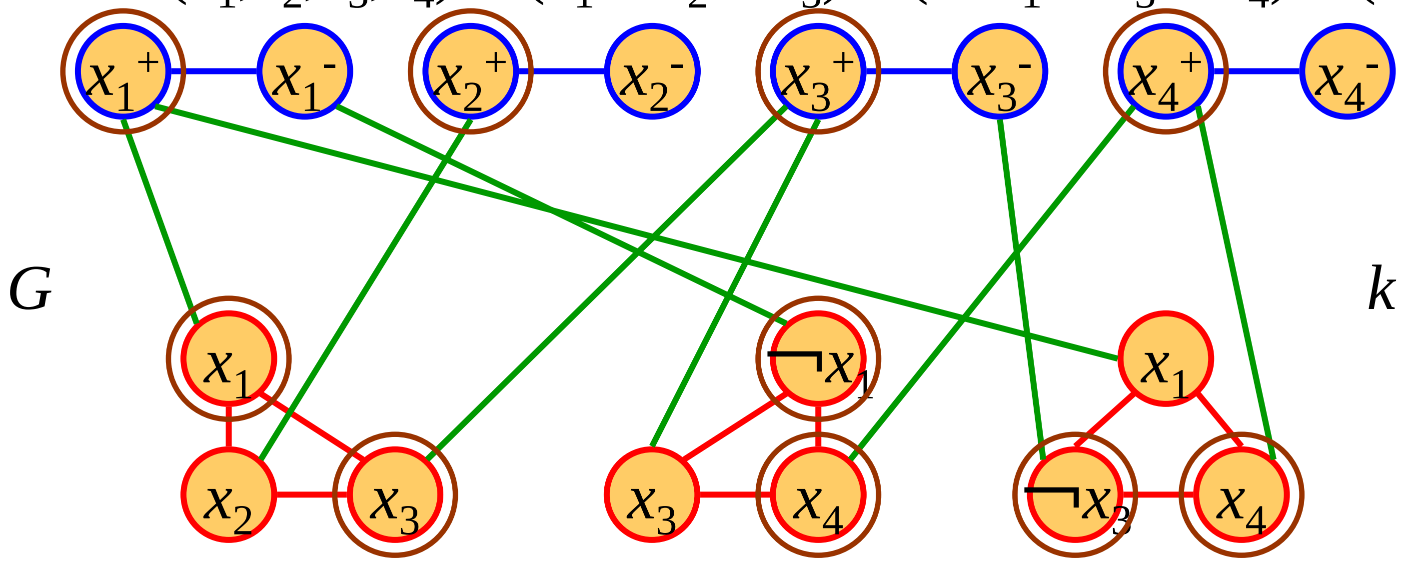
Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

観察:

Gの構成から任意の頂点被覆Sは
- x_i^+, x_i^-のどちらかを含む
- C_jの3頂点中、最低2つ含む

よって $|S| \geqq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

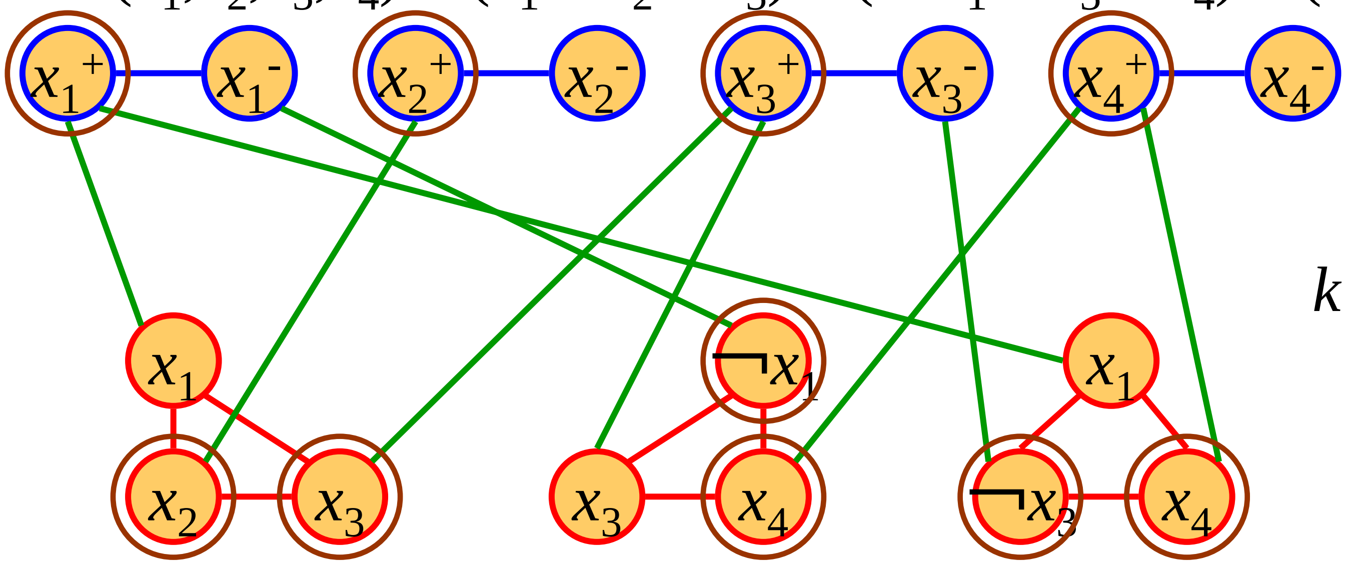
Fを1にする割当が存在する⇒Gがサイズkの頂点被覆を持つ

1. それぞれの変数 x_i が $\begin{cases} x_i=1\text{なら } x_i^+ \text{を} S \text{に入れる} \\ x_i=0\text{なら } x_i^- \text{を} S \text{に入れる} \end{cases}$
2. それぞれの項$C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1},x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2},l_{i3})を S に入れる。

⇒ **観察** より、Sはサイズkの頂点被覆になる。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor x_3 \lor x_4) \land (x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4)$

G



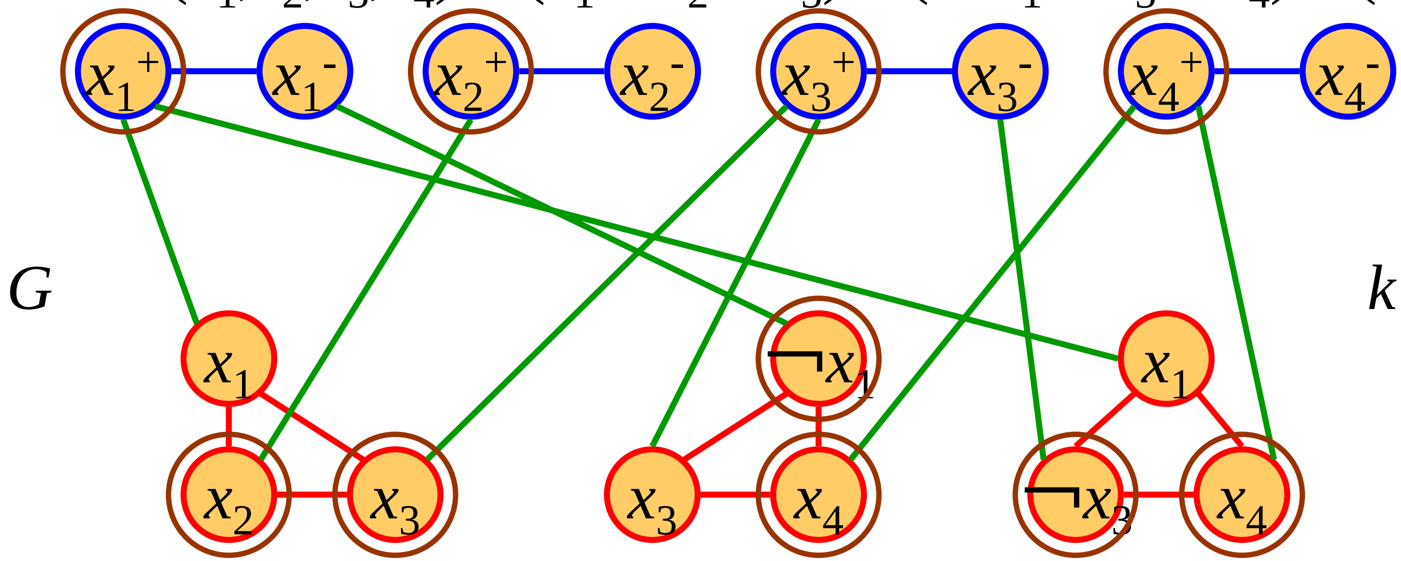
$k = 4+2\times3=10$

Gがサイズkの頂点被覆を持つ⇒ Fを1にする割当が存在する

1. 観察より、被覆Sは項から$2m$個、変数からn個の頂点を含む。
2. さらに各変数x_iについてはx_i^+かx_i^-の一方しか、各項C_jについてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。
3. よって各項C_jはSに含まれないリテラルl_iを含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} x_i^+ \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^- \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=0 \end{array} \right)$$ という割当はFを充足する。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor x_3 \lor x_4) \land (x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4)$

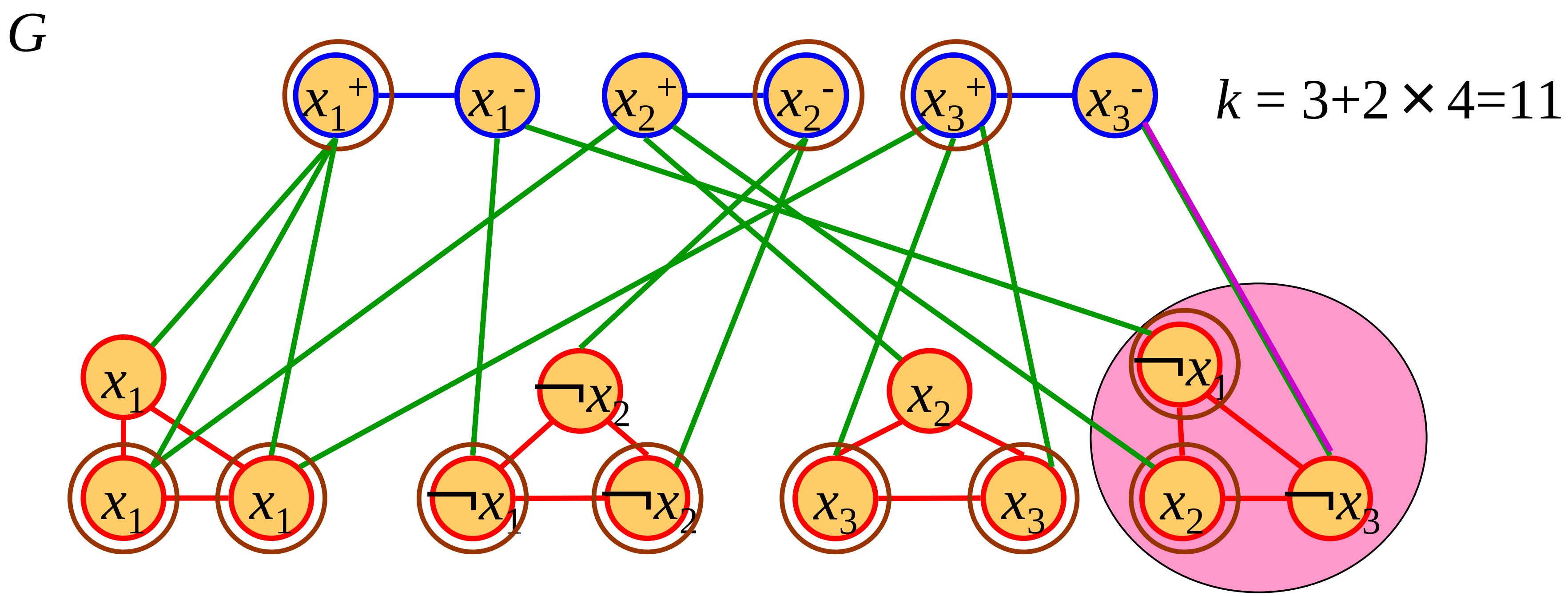


$k = 4+2 \times 3=10$

QED.

充足できない例:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$



充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは k+1以上になる。

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は NP 完全問題

次数: 頂点に付随する辺の本数

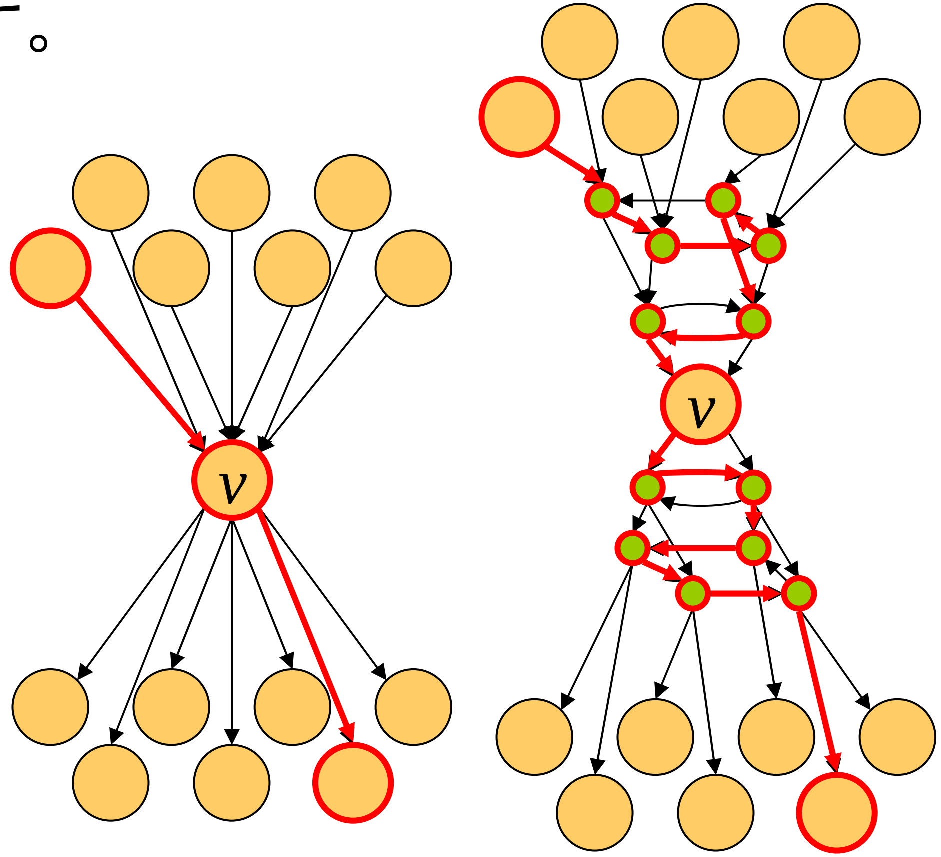
[証明] (上記の問題を$\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$と略記する)

$\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$ がNPに属するのは、DHAMがNPに属することから自明。したがって完全性を示せばよい。
$\mathrm{DHAM} \leq_m^P \mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合)と(出ていく辺集合)を右図の`gadget'で置き換える

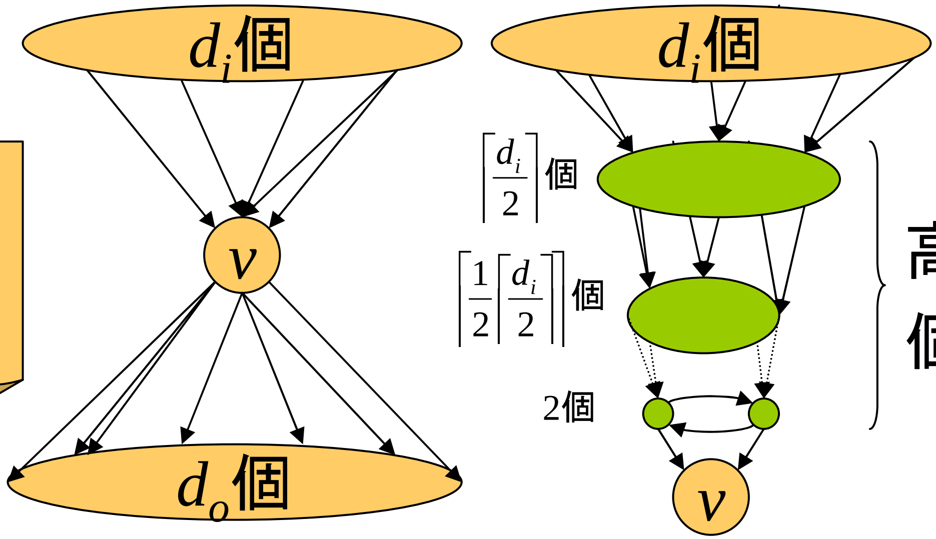
左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。



定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は NP 完全問題

アイデア:

ポイント:
- 各閉路は上から下
- 各頂点は次数≦5



高さ: $O(\log d_i)$
個数: $O(d_i)$

[証明(概要)]

与えられたグラフGの次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

1. 元のグラフGがn頂点m辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフG'は $O(n+m)$頂点 $O(m)$辺となる。したがって上記の還元はGの大きさの多項式時間で可能。
2. またG'のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. Gがハミルトン閉路をもつ⇔G'がハミルトン閉路を持つ

QED.