第6章 多項式時間計算可能性の分析

6.1. 多項式時間還元可能性

定義6.1:
AとBを任意の集合とする.
(1) 関数 $h: A \to B$: 多項式時間還元(polynomial-time reduction)

$\Leftrightarrow$
(a) h はΣ^*からΣ^*への全域的関数
(b) $x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
(c) h は多項式時間計算可能.

(2) AからBへの多項式時間還元が存在するとき,
AはBへ多項式時間還元可能という(polynomial time reducible).
このとき, 次のように書く: $A \le_m^P B$

$A \le_m^P B$ 多項式時間の範囲内では, Aの難しさ$\le$ Bの難しさ

定理6.1. $A \le_m^P B$ のとき,
(1) $B \in$ P → $A \in$P .
(2) $B \in$ NP → $A \in$NP .
(3) $B \in$ co- NP → $A \in$co- NP .
(4) $B \in$ EXP → $A \in$EXP.

補注:クラスEは例外. 一般には, $B \in$E → $A \in$ Eとはならない.

例6.2: ONE≡ {1}と定義するとき, クラスPのすべての集合Lについて $L \le_m^P$ ONE
が成り立つ. $h(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \in L\text{のとき}, \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$
と定義すると, (1) hはΣ^*からΣ^*への全域的関数.
(2) $x \in \Sigma^*[x \in L \leftrightarrow h(x) \in \mathrm{ONE}]$
(3) hは多項式時間計算可能($L \in$P→$x \in L$の判定も多項式時間内)

定理6.2: A, B, C: 任意の集合
(1) $A \le_m^P A$
(2) $A \le_m^P B \wedge B \le_m^P C \to A \le_m^P C$

定義: $A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \le_m^P B \wedge B \le_m^P A$
$\equiv_m^P$ は同値関係

命題論理式の充足可能性問題の間の関係

2SAT (命題論理式充足性問題:二和形式)
3SAT (命題論理式充足性問題:三和形式)
SAT (命題論理式充足性問題)
ExSAT (拡張命題論理式充足性問題)

$2\mathrm{SAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT}$

高々k個…自明
ちょうどk個…レポート

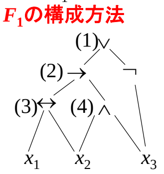
同様に,
$3\mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT}$
$2\mathrm{SAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT}$ (6.1)
ここで
$\mathrm{ExSAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT}$
であることを示せると,
$3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$
となる.

例6.3: ExSATから3SATへの還元

$E_1(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \to [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$
$F_1(x_1, x_2, x_3, U_1, U_2, U_3, U_4) \equiv$
$U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \to U_4]]$
$\wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$

このとき, [E_1が充足可能] ↔ [F_1が充足可能] (6.2)
F_1は三和積形式に直しやすい形になっている.

F_1の構成方法



(1)$V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$
(2)$V_2 \equiv [V_3 \to V_4]$
(3)$V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$
(4)$V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$

F_1を構成するために, $V_i \to U_i$とし, V_iの定義式を $\wedge$で結ぶ

F_1 の構成方法より,
(1)各U_i の値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としない限り, F_1は真にはならない.
(2)各U_iの値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としたとき, $F_1 = E_1$

上の性質が成り立つことは, 帰納法を用いるなどして証明可能.
証明は省略.

三和積形式への変換

$a \to b = \neg a \vee b$
$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a) = [\neg a \vee b] \wedge [\neg b \vee a]$であることを用いる.

$$U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] = [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg [U_2 \vee \neg x_2]]$$
$$= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]]$$
$$= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2]$$
$$= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2]$$

他も同様.
よって, すべて三和積形式に変形できることがわかる.

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

定義6.2: 計算量クラスCに対し，集合Aが次の条件を満たすとき，それを($\leq_m^P$の下で)C-完全という.

(a) $\forall L \in$ C $[L \leq_m^P A]$

(b) $A \in$ C

補注：条件(a)を満たす集合はC-困難.

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

EVAL-IN-E:

入力: $< a, x, \bar{t} >$

a: 1入力プログラムのコード, $x \in \Sigma^*, \bar{t} \geq 0$

出力: $\textit{eval-in-time}(a, x, \overline{2}^{\bar{t}}) = \textit{accept}$?

例6.5. クラスNPの完全集合の例

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VCなど

クラスEXPの完全集合

EVAL-IN-E, HALT-IN-Eなど

定理6.3. 任意のC-困難集合(含：C-完全集合)Aに対し，

(1) $A \in$ P → C ⊆ P 対偶は C ⊄ P → $A \notin$P

(2) $A \in$ NP → C ⊆ NP 対偶は C ⊄NP → $A \notin$NP

(3) $A \in$ co-NP → C ⊆ co-NP 対偶は C ⊄ co-NP → $A \notin$co-NP

(4) $A \in$ EXP → C ⊆ EXP 対偶は C⊄ EXP → $A \notin$EXP

証明：

(1) Bを任意のC集合とすると，AはC-困難だから，

$B \leq_m^P A$ 一方，$A \in$ Pの仮定より，$B \in$ P (定理6.1)

(2), (3), (4)も同様

定理6.3. 任意のC-困難集合(含：C-完全集合)Aに対し，

(1) $A \in$ P → C ⊆ P 対偶は C ⊄ P → $A \notin$P

(2) $A \in$ NP → C ⊆ NP 対偶は C ⊄NP → $A \notin$NP

(3) $A \in$ co-NP → C ⊆ co-NP 対偶は C ⊄ co-NP → $A \notin$co-NP

(4) $A \in$ EXP → C ⊆ EXP 対偶は C⊄ EXP → $A \notin$EXP

例6.6. 定理6.3の意味(クラスNP)

LをNP-完全集合とする.

定理5.9.

(1) NP ⊆ co-NP → NP = co-NP

定理6.3(1)の対偶より，

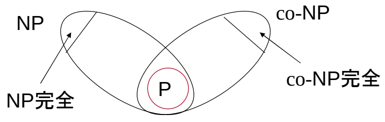
NP ≠ P → $L \notin$ P

定理6.3(3)の対偶と定理5.9(1)の対偶より，

$L \notin$ co-NP

つまり，NP-完全集合はP≠NPである限り，多項式時間では認識できないNP集合である.

NP-完全集合はP ≠NPである限り，NP ∩ co-NPには入らないNP集合である.



例6.7. 定理6.3の意味(クラスEXP)

DをEXP-完全集合とする.

定理6.3(1)の対偶(C ⊄ P → $A \notin$P， ここではEXP ⊄ P →$D \notin$P)

P ≠EXP → EXP⊄P (∴P ⊆ EXP) → $D \notin$P

定理6.3(2)の対偶(C⊄NP → $A \notin$NP ,

ここではEXP ⊄ NP →$D \notin$NP)

NP ≠EXP → EXP⊄ NP (∵ NP ⊆ EXP) → $D \notin$NP

定理6.3(3)の対偶(C ⊄ co-NP → $A \notin$co- NP ,

ここではEXP ⊄co- NP →$D \notin$ co- NP)

co-NP ≠EXP →EXP ⊄co-NP →$D \notin$ co-NP

ところが，定理5.7から，P ⊆ EXP であることを知っているから，無条件に$D \notin$ P.

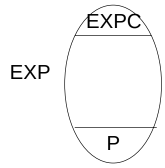
EXP-完全集合は多項式時間では計算不可能.

定理6.4. A: 任意のC-完全集合
すべての集合Bに対し,
(1) $A \le_m^P B \rightarrow B$はC-困難.
(2) $A \le_m^P B \wedge B \in \mathrm{C} \rightarrow B$はC-完全.

証明:
定義6.2より, $\forall L \in C[L \le_m^P A]$
定理6.2より, $L \le_m^P A \wedge A \le_m^P B \rightarrow L \le_m^P B$
したがって, $\forall L \in C[L \le_m^P B]$
すなわち, BはC-困難.

EXPC ≡ {L: LはEXP-完全}
NPC ≡ {L: LはNP-完全}
とすると, 次の定理が成り立つ.

定理6.5.
(1) EXPC ∩ P = ϕ
(2) EXP – (EXPC ∪ P) ≠ ϕ



定理6.6: P ≠ NPを仮定すると
(1) NPC ∩ P = ϕ
(2) NP – (NPC ∪ P) ≠ ϕ