計算量クラス(前回の復習)

$\mathrm{P} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(p(l))$

$\mathrm{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$

$\mathrm{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$

(定義5.2) 集合LがクラスNPに入る⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \exists w \in \Sigma^*: |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

略記: $\exists_q w \in \Sigma^*: [R(x,w)]$

(定理5.5) 集合Lがクラスco-NPに入る⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*: |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

略記: $\forall_q w \in \Sigma^*: [R(x,w)]$

定理5.9.
(1) NP ⊆ co-NP → NP = co-NP
(2) co-NP ⊆ NP → NP = co-NP
(3) NP ≠ co-NP → P ≠ NP.

補注: (3)より，NP ≠ co-NPの証明は，P≠NPの証明より難しい.

証明: (1) NP ⊆ co-NP → NP = co-NP ((2)の証明も同様)
任意のL ∈co-NPに対してL ∈ NPが示せれば，co-NP ⊆ NP が証明できるので，仮定のNP ⊆ co-NPと合わせてNP = co-NP が言える.

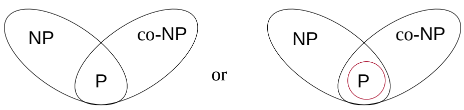
L ∈ co-NP → $\overline{L}$ ∈NP (定義5.3より)
→ $\overline{L}$ ∈ co-NP (NP ⊆ co-NPより)
→ L ∈NP (定義5.3と$\overline{\overline{L}}=L$より)

(3) NP ≠ co-NP → P ≠ NP.

対偶: P = NP → NP = co-NP

P＝NPと仮定すると，すべてのLに対し
L ∈NP ↔ L ∈P (P = NP より)
↔ $\overline{L}$ ∈P (演習問題5.5)
↔ $\overline{L}$ ∈ NP (P = NP より)
↔ L (= $\overline{\overline{L}}$) ∈ co- NP (定義5.3より)
∴ NP = co- NP ((1)より) 証明終

NP ≠co-NPが正しいと



計算量クラス間の定義を概観すると…

クラスPの定義(5章)
集合LがクラスPに入る⇔
以下を満たす多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow R(x)$

クラスNPの定義(定義5.2)
集合LがクラスNPに入る⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \exists w \in \Sigma^*: |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

クラスco-NPの定義(定理5.5)
集合Lがクラスco-NPに入る⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*: |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [R(x_1,x_2,x_3)] \Leftrightarrow \exists w(=<x_1,x_2,x_3>)[R'(w)]$

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [R(x_1,x_2,x_3)] \Leftrightarrow \forall w(=<x_1,x_2,x_3>)[R'(w)]$

…たとえば $\exists x \forall y \exists w[R(x,y,w)]$ は??

クラス Σ_k^p:$L = \{x : \exists_q w_1 \forall_q w_2 \ldots \Phi_q w_k [R(x, w_1, \ldots, w_k)]$

クラス Π_k^p:$L = \{x : \forall_q w_1 \exists_q w_2 \ldots \Phi_q w_k [R(x, w_1, \ldots, w_k)]$

(比較的)すぐわかる関係:

$\Sigma_0^p = \Pi_0^p = \mathrm{P}$ $\qquad \Pi_k^p \subseteq \Pi_{k+1}^p \cap \Sigma_{k+1}^p$

$\Sigma_1^p = \mathrm{NP}$ $\qquad \Sigma_k^p \subseteq \Pi_{k+1}^p \cap \Sigma_{k+1}^p$

$\Pi_1^p = \text{co-NP}$

(比較的)すぐわかる関係:

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma_1^p = \mathrm{NP} \arrow[r] \arrow[dr] & \Sigma_2^p \arrow[r] \arrow[dr] & \Sigma_3^p \arrow[r] \arrow[dr] & \Sigma_4^p \arrow[dr] & \\
\Sigma_0^p = \Pi_0^p = \mathrm{P} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \mathrm{EXP} \\
 & \Pi_1^p = \text{co-NP} \arrow[r] \arrow[ur] & \Pi_2^p \arrow[r] \arrow[ur] & \Pi_3^p \arrow[r] \arrow[ur] & \Pi_4^p \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{PH} \equiv \bigcup_k \Sigma_k^p = \bigcup_k \Pi_k^p$$

戸田の定理: PH ⊆ P^{PP}

祝!!
ゲーデル賞