計算量クラス(前回の復習)

$$\mathrm{P} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(p(l))$$

$$\mathrm{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$$

$$\mathrm{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$$

(定義5.2) 集合LがクラスNPに入る⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \exists w \in \Sigma^*: |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

略記: $\exists_q w \in \Sigma^*: [R(x,w)]$

(定理5.5) 集合Lがクラスco-NPに入る⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*: |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

略記: $\forall_q w \in \Sigma^*: [R(x,w)]$

定理5.9.
(1) NP $\subseteq$ co-NP → NP = co-NP
(2) co-NP $\subseteq$ NP → NP = co-NP
(3) NP $\neq$ co-NP → P $\neq$ NP.

補注: (3)より，NP $\neq$ co-NPの証明は，P$\neq$NPの証明より難しい.

証明:　(1) NP $\subseteq$ co-NP → NP = co-NP ((2)の証明も同様）
任意の$L \in$co-NPに対して$L \in$NPが示せれば，co-NP $\subseteq$ NPが証明できるので，仮定のNP $\subseteq$ co-NPと合わせてNP = co-NPが言える.

$L \in$ co-NP $\rightarrow \overline{L} \in$NP (定義5.3より）
$\rightarrow \overline{L} \in$ co-NP (NP $\subseteq$ co-NPより）
$\rightarrow L \in$NP (定義5.3と$\overline{\overline{L}}=L$より）

(3) NP $\neq$ co-NP → P $\neq$ NP.

対偶: P = NP → NP = co-NP

P＝NPと仮定すると, すべてのLに対し

$L \in$ NP $\leftrightarrow L \in$ P　（ P = NP より）

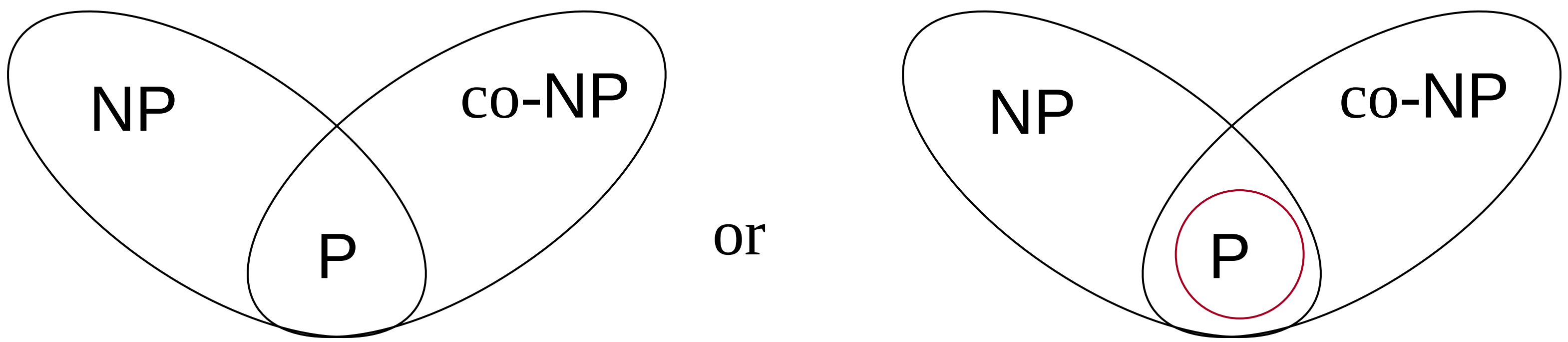
$\leftrightarrow \overline{L} \in$ P　(演習問題5.5)

$\leftrightarrow \overline{L} \in$ NP　(P = NP より）

$\leftrightarrow L\ (= \overline{\overline{L}}) \in$ co- NP　(定義5.3より)

$\therefore$ NP = co- NP　((1)より)　証明終

NP $\neq$co-NPが正しいと



計算量クラス間の定義を概観すると...

クラスPの定義(5章)
集合LがクラスPに入る⇔
以下を満たす多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow R(x)$

クラスNPの定義(定義5.2)
集合LがクラスNPに入る⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \exists w \in \Sigma^*: |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

クラスco-NPの定義(定理5.5)
集合Lがクラスco-NPに入る⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*: |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [R(x_1,x_2,x_3)] \Leftrightarrow \exists w(=\langle x_1,x_2,x_3\rangle)[R'(w)]$

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [R(x_1,x_2,x_3)] \Leftrightarrow \forall w(=\langle x_1,x_2,x_3\rangle)[R'(w)]$

…たとえば $\exists x \forall y \exists w[R(x,y,w)]$ は??

クラス Σ_k^p: $L = \{x : \exists_q w_1 \forall_q w_2 \ldots \Phi_q w_k [R(x, w_1, \ldots, w_k)]$

クラス Π_k^p: $L = \{x : \forall_q w_1 \exists_q w_2 \ldots \Phi_q w_k [R(x, w_1, \ldots, w_k)]$

(比較的)すぐわかる関係:

$\Sigma_0^p = \Pi_0^p = \mathrm{P}$

$\Sigma_1^p = \mathrm{NP}$

$\Pi_1^p = \text{co-NP}$

$\Pi_k^p \subseteq \Pi_{k+1}^p \cap \Sigma_{k+1}^p$

$\Sigma_k^p \subseteq \Pi_{k+1}^p \cap \Sigma_{k+1}^p$

(比較的)すぐわかる関係:

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma_1^p = \mathrm{NP} \arrow[r] \arrow[dr] & \Sigma_2^p \arrow[r] \arrow[dr] & \Sigma_3^p \arrow[r] \arrow[dr] & \Sigma_4^p \arrow[dr] & \\
\Sigma_0^p = \Pi_0^p = \mathrm{P} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \mathrm{EXP} \\
 & \Pi_1^p = \text{co-NP} \arrow[r] \arrow[ur] & \Pi_2^p \arrow[r] \arrow[ur] & \Pi_3^p \arrow[r] \arrow[ur] & \Pi_4^p \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$\mathrm{PH} \equiv \bigcup_k \Sigma_k^p = \bigcup_k \Pi_k^p$$

戸田の定理: PH ⊆ P^{PP}

祝!!
ゲーデル賞