5.2. クラスNP

定義5.2: 集合 L に対して次の条件を満たす多項式 q と多項式時間計算可能述語 R が存在したとする.

$$\text{各} x \in \Sigma^* \text{で} x \in L \leftrightarrow \exists w \in \Sigma^* : |w| \le q(|x|)[R(x,w)] \quad (5.1)$$

つまり, $L = \{x : \exists w \in \Sigma^*[\,|w| \le q(|x|) \wedge R(x,w)]\}$

このとき, LをNP集合といい, Lの認識問題をNP問題という.
また, NP集合の全体をクラスNPという.

補注 : 各 $x \in \Sigma^*$に対して, 論理式 $|w| \le q(|x|) \wedge R(x,w)$ を満たす $w_x \in \Sigma^*$をxの(多項式長の)証拠という.
以下では, $\exists w \in \Sigma^* : |w| \le q(|x|) \quad \Rightarrow \quad \exists_q w$ と略記.

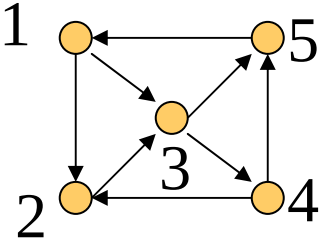
「入力サイズの多項式長の証拠が与えられたとき, これが問題の条件を満たすかどうかを多項式時間で判定できる. 」

補足 : NP=Nondeterministic Polynomial

例5.7: ハミルトン閉路問題 (DHAM) $\in$ NP

グラフの頂点は1〜n と番号づけされていると仮定.
ハミルトン閉路の辿り方➔ 1〜n の順列$< l_1, l_2, \dots , l_n >$
この順列が多項式長の証拠

(注)全部で $n!$〜n^n 通りある

例: 

証拠の候補
<1,2,3,4,5> ➔ハミルトン閉路 ➔証拠
<1,2,3,5,4> ➔ハミルトン閉路でない
<1,4,3,2,5> ➔ハミルトン閉路でない

$R_D(x, w)$ $\leftrightarrow$[xはあるグラフG(n頂点)のコード]
$\wedge$ [wは1〜nの順列$< l_1, l_2, \dots , l_n >$]
$\wedge$[wはGのハミルトン閉路を表している]

すべての $x \in \Sigma^*$について次の関係が成り立つ.

xがあるグラフGのコードになっているとき:

$$x \in \mathrm{DHAM} \leftrightarrow \exists w_G (=< l_1, \dots, l_n >)[R_D(x, w_G)]$$

xがグラフのコードになっていないとき: $\forall w[\neg R_D(x, w)]$

例5.8: 命題論理式充足性問題(3SAT, SAT, ExSATなど)

目標: ExSAT $\in$ NP

$F(x_1, \ldots, x_n)$: 任意の拡張命題論理式

Fが充足可能 $\leftrightarrow$ $\exists a_1, \ldots, a_n$: 各a_iは1か0 $[F(a_1, \ldots, a_n) = 1]$

証拠の長さq_E

Fへの真偽値の割り当てを$< a_1, \ldots, a_n >$で表す.

→ 長さは $3(n+n+1)=6n+3 \leq 6|\ulcorner F \urcorner| + 3$

$q_E(l) = 6l+3$

述語R_E

$R_E(x, w) \leftrightarrow [x$はある拡張命題論理式$F$ (n変数)のコード$]$

$\wedge [w$はFへの割り当て$< a_1, a_2, \ldots, a_n >]$

$\wedge [F(a_1, \ldots, a_n) = 1]$

計算木を用いると$F(a_1, \ldots, a_n)$ の値は多項式時間で計算可能.

よって, R_Eも多項式時間で計算可能.

NP集合であることの意味は何か?

(5.1)を満たすq, Rを用いると, $x \in L$? を次のように判定できる.

```
for each  w ∈ Σ^{≤q(|x|)} do
   if R(x, w) then accept end-if
end-for;
reject;
```

長さが$q(|x|)$以下の文字列をすべて列挙して調べれば, acceptかrejectか判定できる. ただ, そのような文字列は2の$q(|x|)$乗個（指数関数）存在することに注意.

上記の計算方式で認識できる集合をNP集合と考えてよい.

NPに関連したクラス

定義5.3. 集合Lは，その補集合$\overline{L}$がNPに属しているとき，
co-NP集合という．また，co-NP集合の全体を**クラスco-NP**という．

補注：co-P を定義しても P と同じなので無意味．

定理5.5. すべての集合 L に対し，次の条件は同値．

(a) $L \in \text{co-NP}$

(b) 集合 L を，適当な多項式 q と多項式時間計算可能述語Qを用いて，

$$L = \{x : \forall w \in \Sigma^* : |w| \leq q(|x|)[Q(x,w)]\}$$

と表せる．

例5.9: 素数判定問題

$$\lceil n \rceil \notin \mathrm{PRIME} \leftrightarrow \exists m{:}1 < m < n[\ n \bmod m = 0]$$

したがって，$q_p(n) = n$とし，

$$R_p(x,w) \leftrightarrow [x \notin \mathsf{N}] \vee [[w \in \mathsf{N}] \wedge [1 < m < n] \wedge [n \ \mathsf{mod}\ m = 0]]$$

(ただし，n, mは各々x, wが表す自然数，
Nは自然数の2進表記全体）

と定義すると，

すべての $x \in \Sigma^*$ に対し，　$x \notin \mathrm{PRIME} \leftrightarrow \exists q_p w[R_p(x,w)]$

これは，$x \notin \mathrm{PRIME}$に対する証拠

よって，$\overline{\mathrm{PRIME}} \in$ NP，i.e., PRIME $\in$ co-NP

実際，$Q(x, w) \leftrightarrow \neg R_p(x, w)$ とすると

$$\mathrm{PRIME} = \{x\text{: } \forall q_p w\ [Q_p(x, w)]\}$$

と表せる．

PRIME $\in$ NPも示せるが，その証明はもっと複雑．

NP問題の例

・**合成数判定問題**(COMPOSITE)

入力：自然数n

質問：nは合成数か？（素数でないか？）

・**ナップサック問題**(KNAP)

入力：自然数の組$< a_1, a_2, \dots , a_n, b >$

質問：$\sum_{i \in S} a_i = b$ となる添字の集合 $S \subseteq \{1, \dots , n\}$があるか？

・**箱詰め問題**(BIN)

入力：自然数の組$< a_1, a_2, \dots , a_n, b, k >$

質問：添字の集合$U=\{1, \dots , n\}$を$U_1, \dots , U_k$のk個に分割し，各jで $\sum_{i \in U_j} a_i \le b$ とすることは可能か？

・**頂点被覆問題**(VC)

入力：無向グラフGと自然数kの組$< G, k >$

質問：Gにk頂点の頂点被覆が存在するか？

頂点被覆S:
どの辺(u,v)も
u,vの一方は
Sに含まれる

5.3. 計算量クラス間の関係

定理5.6: P $\subseteq$ E $\subseteq$ EXP.

定義より，明らか.

定理5.7: P $\subsetneqq$ E $\subsetneqq$ EXP.

証明:

(1) P $\subsetneqq$ E.

$t_1(n)=2^n$, $t_2(n)=2^{3n}$とすると，階層定理より，

$$\mathrm{TIME}(2^n) \subsetneqq \mathrm{TIME}(2^{3n})$$

一方，P $\subseteq \mathrm{TIME}(2^n) \subsetneqq \mathrm{TIME}(2^{3n}) \subseteq$ E だから，

$$\mathrm{P} \subsetneqq \mathrm{E}.$$

(2)も同様.

証明終

定理5.8.

(1) P ⊆ NP, P ⊆ co−NP (よって, P ⊆ NP ∩ co−NP)

(2) NP ⊆ EXP, co−NP ⊆ EXP (よって, NP ∪ co−NP ⊆ EXP)

証明: (1) P ⊆ NP（P ⊆ co−NP も同様）

L: 任意のP集合

➔ Lは多項式時間で認識可能

よって, 多項式時間計算可能述語Pを用いて次のように書ける.

$\forall x \in \Sigma^*: [x \in L \leftrightarrow P(x)]$ or $P = \{x: P(x)\}$

$R(x, w) = P(x)$と定義 （第2引数は無視）

→ 任意の多項式qについて,

$L = \{x: \exists_q w[\ R(x,w)]\}$

よって, NPの定義より, $L \in$ NP i.e., P ⊆ NP.

(2) NP ⊆ EXP (co-NP ⊆ EXP)

L: 任意のNP集合

➔多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在して，

$$L = \{x : \exists_q w[R(x, w)]\} = \{x : \exists_q w[|w| \le q(|x|) \wedge R(x, w)]\}$$

qとRを用いて，Lを認識するプログラムを作る.

```
prog L(input x);
begin
    for each w ∈ Σ^{≤q(|x|)} do
      if R(x, w) then accept end-if
    end-for;
    reject
end.
```

長さlの入力に対するプログラムの時間計算量:

Rは多項式時間計算可能だったから，ある多項式pに対し，

Rの計算時間$=p(|x| + |w|) \le p(l + q(l)) \longleftarrow l$ の多項式

全体では，$\{p(l+q(l)) + cq(l)\}2^{q(l)} + d = O(2^{l+q(l)})$

よって，$L \in$ EXP ➔ NP ⊆ EXP　　証明終

定理5.9.

(1) NP $\subseteq$ co-NP → NP = co-NP
(2) co-NP $\subseteq$ NP → NP = co-NP
(3) NP $\neq$ co-NP → P $\neq$ NP.

補注: (3)より，NP $\neq$ co-NPの証明は，P$\neq$NPの証明より難しい．

証明： (1) NP $\subseteq$ co-NP → NP = co-NP ((2)の証明も同様）
任意の$L \in$co-NPに対して$L \in$NPが示せれば，co-NP $\subseteq$ NP
が証明できるので，仮定のNP $\subseteq$ co-NPと合わせてNP = co-NP
が言える.

$L \in$ co-NP $\rightarrow \overline{L} \in$NP (定義5.3より）
$\rightarrow \overline{L} \in$ co-NP (NP $\subseteq$ co-NPより）
$\rightarrow L \in$NP (定義5.3と$\overline{\overline{L}}=L$より）

(3) NP ≠ co-NP → P ≠ NP.

対偶：P = NP → NP = co-NP

P＝NPと仮定すると，すべてのLに対し

$L \in$ NP $\leftrightarrow L \in$ P　（P = NP より）

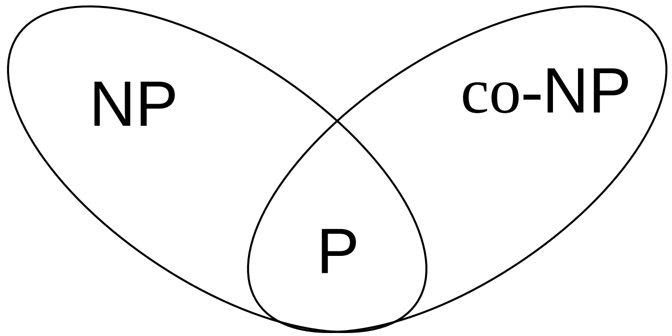
$\leftrightarrow \overline{L} \in$ P　(演習問題5.5)

$\leftrightarrow \overline{L} \in$ NP　(P = NP より）

$\leftrightarrow L\ (= \overline{\overline{L}}) \in$ co- NP　(定義5.3より)

$\therefore$ NP = co- NP　証明終

NP ≠co-NPが正しいと



or