# 第5章 代表的な計算量クラス

## 5.1. 代表的な時間計算量クラス

$\mathrm{P} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(p(l))$

$\mathrm{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$

$\mathrm{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$

C集合： 計算量クラスCに入る集合.
C問題： C集合の認識問題

ある問題がPに入っていないなら、
現実的には手に負えない…



**例5.1:** クラスP, E, EXPでは，多項式時間程度の違いは問題ではない.
P: 多項式 × 多項式→多項式
E: 2の線形乗 × 多項式 → 2の線形乗
EXP: 2の多項式乗 × 多項式 → 2の多項式乗

例5.2: PRIMEの計算量クラス
例4.7 → PRIME $\in \mathrm{TIME}(2^l)$
故に，PRIME $\in$ E

余談: 2002年に $O(l^6)$ のアルゴリズムが考案されたので、今ではP

**定義5.1.** T: 制限時間の集合

$\bigcup_{t \in \mathrm{T}} \mathrm{TIME}(t)$: T時間計算量クラス
→これをTIME(T)と表す.

定理5.1: (1) $\mathrm{P} = \cup_{c>0}\mathrm{TIME}(l^c)$, (2) $\mathrm{EXP} = \cup_{c>0} \mathrm{TIME}(2^{l^c})$



**定理5.1:** (1) $\mathrm{P} = \cup_{c>0}\mathrm{TIME}(l^c)$, (2) $\mathrm{EXP} = \cup_{c>0}\mathrm{TIME}(2^{l^c})$

証明: (2)の証明は省略.
$\mathrm{T}_1$: $n^c$という形の多項式の集合.
$\mathrm{T}_2$: 多項式の全体
→ $\mathrm{T}_1 \subseteq \mathrm{T}_2$ なので，$\mathrm{TIME}(\mathrm{T}_1) \subseteq \mathrm{TIME}(\mathrm{T}_2)$
$p$: 任意の多項式 （$p$は$\mathrm{T}_2$の任意の要素）
多項式$p$の最大次数を$k$とすると，$p(n) = O(n^k)$
定理4.3より，
$\mathrm{TIME}(p(l)) \subseteq \mathrm{TIME}(l^k) \subseteq \mathrm{TIME}(\mathrm{T}_1)$
したがって，$\mathrm{TIME}(\mathrm{T}_1) = \mathrm{TIME}(\mathrm{T}_2)$
証明終



例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)
入力: $<F, < a_1, a_2, \ldots , a_n >>$
$F$は拡張命題論理式 $\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow$
$(a_1, a_2, \ldots , a_n)$は $F$ に対する真理値割り当て
質問: $F(a_1, a_2, \ldots , a_n) = 1$?

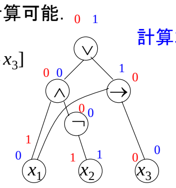
| $(x,y)$ | $x \rightarrow y$ $(\neg x \vee y)$ | $x \leftrightarrow y$ $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))$ |
|---|---|---|
| (0,0) | 1 | 1 |
| (0,1) | 1 | 0 |
| (1,0) | 0 | 0 |
| (1,1) | 1 | 1 |



例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)
入力: $<F, < a_1, a_2, \ldots , a_n >>$
$F$は拡張命題論理式 $\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow$
$(a_1, a_2, \ldots , a_n)$は$F$に対する真理値割り当て
質問: $F(a_1, a_2, \ldots , a_n) = 1$?

拡張命題論理式 $F$ がコード化されたもの $\ulcorner F \urcorner$ から計算木を作る.
計算木は$O(|\ulcorner F \urcorner|^3)$時間で構成できる.
計算木が得られていれば，ボトムアップ式で
$F(a_1, a_2, \ldots , a_n)$ の値は容易に計算可能.

計算木




例: $F(x_1, x_2 , x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$

$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

よって PROP-EVAL ∈ P



例5.3. 命題論理式充足性問題：2和積形(2SAT)

入力: $<F, < a_1, a_2, \ldots , a_n >>$ $F$は2和積形命題論理式

質問: $F(a_1, a_2, \ldots , a_n) = 1$を満たす割り当てがあるか?

和積形:
$F$ = (●∨●∨…∨●)∧(●∨…∨●)∧…∧(…)
- リテラルの論理和の論理積で表現されたもの

ちょうど/たかだか

$k$和積形($k$ SAT)
- 和積形の各論理和が $k$ 個のリテラルを含む

- 3SAT, 4SAT も同様に定義できる。
- SAT: 各論理和のリテラルの個数に制限がないもの
- ExSAT: 入力が拡張命題論理式(→や↔も許す)

7/8

例5.4: 到達可能性問題(ST-CON)
入力 : $<G,s,t>$ : 無向グラフ$G$, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$
質問: $G$上で $s$ から $t$ への道があるか?

- 閉路とは、始点と終点が同じである路
- オイラー閉路とは、すべての辺を一度づつ通る閉路
- ハミルトン閉路とは、すべての頂点を一度づつ通る閉路

例5.4: 一筆書き閉路問題(DEULER)
入力 : $<G>$: 有向グラフ$G$
質問: $G$はオイラー閉路をもつか?

例5.5: ハミルトン閉路問題(DHAM)
入力 : $<G>$: 有向グラフ$G$
質問: $G$はハミルトン閉路をもつか?

8/8

知られていること:

- 以下の問題はP:
  - ✓ PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER
- 以下の問題はEであることはわかっているが…
  - ✓ 3SAT, DHAM

PとEの間にある(?)クラスNP