第5章 代表的な計算量クラス

5.1. 代表的な時間計算量クラス

$$\mathrm{P} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(p(l))$$

$$\mathrm{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$$

$$\mathrm{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$$

C集合: 計算量クラスCに入る集合.
C問題: C集合の認識問題

ある問題がPに入っていないなら、
現実的には手に負えない…

例5.1: クラスP, E, EXPでは，多項式時間程度の違いは問題ではない.

P: 多項式 × 多項式→多項式

E: 2の線形乗 × 多項式 → 2の線形乗

EXP: 2の多項式乗 × 多項式 → 2の多項式乗

例5.2: PRIMEの計算量クラス

例4.7 → PRIME $\in$ TIME(2^l)

故に，PRIME $\in$ E

余談: 2002年に $O(l^6)$ のアルゴリズムが考案されたので、今ではP

定義5.1. T: 制限時間の集合

$\bigcup_{t \in T}$ TIME(t): T時間計算量クラス

→これをTIME(T)と表す.

定理5.1: (1) P = $\cup_{c>0}$TIME(l^c), (2) EXP = $\cup_{c>0}$ TIME(2^{l^c})

定理5.1: (1) P = $\bigcup_{c>0}$TIME(l^c), (2) EXP = $\bigcup_{c>0}$TIME(2^{l^c})

証明: (2)の証明は省略.

T_1: n^cという形の多項式の集合.

T_2: 多項式の全体

→ $T_1 \subseteq T_2$ なので, TIME(T_1) $\subseteq$ TIME(T_2)

p: 任意の多項式 (pはT_2の任意の要素)

多項式pの最大次数をkとすると, $p(n) = O(n^k)$

定理4.3より,

TIME($p(l)$) $\subseteq$ TIME(l^k) $\subseteq$ TIME(T_1)

したがって, TIME(T_1) ＝ TIME(T_2)

証明終

例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)

入力 : $\langle F, \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle\rangle$

Fは拡張命題論理式 $\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$は F に対する真理値割り当て

質問 : $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$?

(x,y)	$x \rightarrow y$ $(\neg x \vee y)$	$x \leftrightarrow y$ $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))$
(0,0)	1	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)

入力: $<F, < a_1, a_2, \ldots , a_n >>$

Fは拡張命題論理式 $\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow$

$(a_1, a_2, \ldots , a_n)$はFに対する真理値割り当て

質問: $F(a_1, a_2, \ldots , a_n) = 1$?

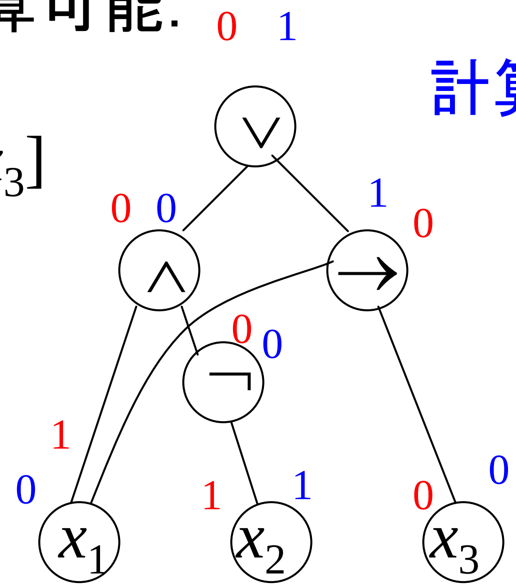
拡張命題論理式 F がコード化されたもの $\ulcorner F \urcorner$ から計算木を作る.

計算木は$O(|\ulcorner F \urcorner|^3)$時間で構成できる.

計算木が得られていれば, ボトムアップ式で

$F(a_1, a_2, \ldots , a_n)$ の値は容易に計算可能.

計算木



例: $F(x_1, x_2 , x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$

$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

よって PROP-EVAL $\in$ P

例5.3. 命題論理式充足性問題：2和積形(2SAT)

入力：$<F, < a_1, a_2, \ldots , a_n >>$ Fは2和積形命題論理式

質問：$F(a_1, a_2, \ldots , a_n) = 1$を満たす割り当てがあるか?

和積形:

$$F = (\bullet \vee \bullet \vee \ldots \vee \bullet) \wedge (\bullet \vee \ldots \vee \bullet) \wedge \ldots \wedge (\ldots)$$

- リテラルの論理和の論理積で表現されたもの

ちょうど/たかだか

k和積形(k SAT)

- 和積形の各論理和が k 個のリテラルを含む

- 3SAT, 4SAT も同様に定義できる。
- SAT: 各論理和のリテラルの個数に制限がないもの
- ExSAT: 入力が拡張命題論理式(→や↔も許す)

例5.4: 到達可能性問題(ST-CON)

入力: <G,s,t> : 無向グラフG, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$

質問: G上で s から t への道があるか?

- 閉路とは、始点と終点が同じである路
- オイラー閉路とは、すべての辺を一度づつ通る閉路
- ハミルトン閉路とは、すべての頂点を一度づつ通る閉路

例5.4: 一筆書き閉路問題(DEULER)

入力: <G>: 有向グラフG

質問: Gはオイラー閉路をもつか?

例5.5: ハミルトン閉路問題(DHAM)

入力: <G>: 有向グラフG

質問: Gはハミルトン閉路をもつか?

知られていること:

- 以下の問題はP:
  - ✓ PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER

- 以下の問題はEであることはわかっているが…
  - ✓ 3SAT, DHAM

PとEの間にある(?)クラスNP