

第4章 計算の複雑さ入門

1/14

4.1. 計算の複雑さの理論概観

「計算可能か？」→「どの程度の計算コストで計算可能か？」
計算の複雑さの理論 (Computational Complexity Theory)

- (1) 計算量の上限に関する研究
- (2) 計算量の下限に関する研究
- (3) 計算の難しさについての構造的な研究

(1) 計算量の上限に関する研究

効率のよいアルゴリズムの設計 (アルゴリズム理論)
ある問題 X に対して、それを解くアルゴリズム A があり、
サイズ n の **どんな問題例** に対しても A の時間計算量が
 $T(n)$ 以内であるとき、アルゴリズム A の時間計算量の
上限は $T(n)$

(最悪時の漸近的時間計算量)

2/14

(2) 計算量の下限に関する研究

問題 X に対する **どんなアルゴリズム** も最悪の場合には $T(n)$
時間だけ必ずかかってしまうとき、問題 X の時間計算量の
下限は $T(n)$.
• $P \neq NP$ 予想
• 暗号システムの頑健さ

(3) 計算の難しさについての構造的な研究

“ xx 程度の難しさ” がもつ特徴について調べること。
難しさの程度による階層構造。

4.2. 計算時間の計り方

3/14

4.2.1. 標準形プログラム再考

定義4.1. (計算時間の定義)

A : k 入力標準形プログラム
 x_1, x_2, \dots, x_k : A への入力

- 全体は while ループ
- 各行は
 - > 1つの if 文+pcへの代入
 - > 基本命令1つ+pcへの代入

A の while ループ1回りの実行を A での **1ステップ** という。
入力 x_1, x_2, \dots, x_k に対して A が停止するまでに回る while ループの
回数を A の x_1, x_2, \dots, x_k に対する **計算時間** (略して $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$)
の計算時間という。ただし、停止しないとき、計算時間は無限大。

$time_A(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv A(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の計算時間

$time_A(l) \triangleq \max \{ time_A(x_1, x_2, \dots, x_k) : \sum_{1 \leq i \leq k} |x_i| = l \}$

標準形プログラム

4/14

```

prog プログラム名 (input ...);
var pc:  $\Sigma^*$ ; ...;  $\Sigma^*$ ;
begin
  pc:=1;
  while pc  $\neq$  0 do
    case pc of
      1: (文);           各(文)の形は
      2: (文);           - if 比較文 then pc:= $k_1$  else pc:= $k_2$  end-if
      3: (文);           - 代入文; pc:= $k$ ;
      .....
       $K$ : (文);          のいずれか。
    end-case
  end-while;
  halt( $\Sigma^*$ 型の変数);
end.
    
```

各文が高々定数時間で実行できるための制約

u, u' : Σ 型の変数, v, v' : Σ^* 型の変数

c : Σ 型の定数, s : Σ^* 型の定数

- (代入文) (1) $u := c$; (2) $u := u'$;
(3) $u := \text{head}(v)$; (4) $u := \text{tail}(v)$;
(5) $v := s$; (6) $v := v \cdot c$??
(7) $v := \text{right}(v)$; (8) $v := \text{left}(v)$;
(9) $v := u \# v$; (10) $v := v \# u$;

- (比較文) (11) $u = c$ (12) $v = s$

• $v = v'$ の形の比較は禁止されている。

4.2.2. プログラムの時間計算量

6/14

プログラムの時間計算量を **入力サイズ** の関数として表現
(入力文字列の長さ)

妥当なコード化:

元の対象のサイズに定数倍の範囲内で忠実なコード化

例4.5: 1進表記と2進表記

「数のサイズはその桁数」との立場では
2進表記は妥当なコード化であるが、
1進表記は冗長なコード化

定義4.3: 自然数上の関数 f, g に対し、
 $\exists c, d > 0, \forall n [f(n) \leq c g(n) + d]$
 となるとき、 f はオーダー g であるといい、 $f = O(g)$ と記述する。

★定数 c, d は n と無関係に定まることが必要。

定理4.1: 自然数上の任意の関数 f, g, h に対し次の関係が成立。

- (1) $\forall n [f(n) \leq g(n)] \rightarrow f = O(g)$
- (2) $\exists c > 0, \forall n [f(n) \leq c g(n)] \rightarrow f = O(g)$
- (3) $[f = O(g) \text{ かつ } g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

4.2.3. 問題の時間計算量

定義4.4. Φ を計算問題とし、 t を自然数上の関数とする。
 いま Φ を計算するプログラム A と定数 $c, d > 0$ が存在して、
 $\forall l [\text{time}_A(l) \leq ct(l) + d]$
 ならば、 Φ は $O(t)$ 時間計算可能、あるいは Φ の時間計算量は $O(t)$ であるという。

注意: ここでは計算問題として、集合の認識問題を想定している。

直観的には「問題 Φ は t 時間以下で計算可能」という意味。

- (注1) A の時間計算量は t より低いかもしれない。
- (注2) A よりも速く Φ を計算するプログラムがあるかもしれない。

例4.7. 素数判定問題の時間計算量

素数判定問題 (PRIME)

入力: 自然数 n (ただし、2進表記)
 質問: n は素数か?
 PRIME $\equiv \{ [n] : n \text{ は素数} \}$

スターリングの公式:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```

prog Naive(input n);
begin
  for each i := 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.
    
```

log n * log i 時間

$$\text{time_Naive}(n) \leq \sum_{i < n} (c \log n \log i + d) = c \log n \log n + dn = O(n \log n^2)$$

n の長さを l とすると、 l はほぼ $\log n$ だから、 $\text{time_Naive} = O(l^2 2^l)$
 故に、素数判定問題の時間計算量は (高々) $O(l^2 2^l)$

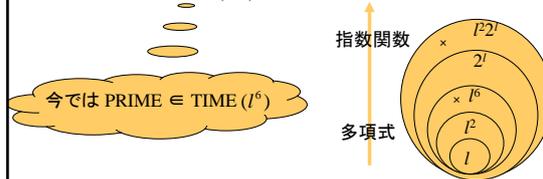
余談:
 2002年に
 $O(l^6)$
 のアルゴリズム
 が考案された!!

定義4.5.

自然数上の関数 t に対し、時間計算量が $O(t)$ となる集合 (i.e., 認識問題) の全体を $O(t)$ 時間計算量クラスといい、そのクラスを $\text{TIME}(t)$ と表す。

また、 t のような関数を制限時間と呼ぶ。
 たとえば、 $O(l^2 2^l)$ 時間で認識可能な集合を集めたクラスが $\text{TIME}(l^2 2^l)$ であり、集合 PRIME はその一要素。

$$\text{PRIME} \in \text{TIME}(l^2 2^l)$$



制限時間 t にふさわしい関数の条件

自然な制限時間 (の定義)

- (a) $\forall n [n \leq t(n)]$
- (b) $\forall n_1, n_2 [n_1 < n_2 \rightarrow t(n_1) \leq t(n_2)]$
- (c) 与えられた入力 x に対し、 $t(|x|)$ ($t(|x|)$ の1進表記) を求める計算が $O(t)$ 時間で可能

- (a) の条件: 入力を読むだけで n 時間かかってしまうから。
- (c) の条件: 時間が $t(n)$ になったら計算を打ち切るようにするためのタイマーが実現できるようにするため。
 (1進表記を作って、1桁ずつ短くしていく)。

例4.8: 集合 $D = \{ \langle a, b \rangle : a \text{ は } b \text{ で割り切れる} \}$ の時間計算量

集合 D を認識するプログラムとして、下のプログラムを考える。

```

prog D(input x);
begin
  a:=get(x, 1); b:=get(x, 2);
  % x = <a,b> の形でないときは、この時点でreject
  if a mod b = 0 then accept else reject end-if
end.
    
```

$O(|a||b|)$ 時間で計算可能

$$\text{time}_D(x) = O(|x|^2)$$

入力が $x = \langle a, b \rangle$ の形のときは $O(|x|^2)$ 時間かかるが、そうでない場合には mod 計算の前に reject するので、 $O(|x|)$ 時間で終わってしまう。これは自然な制限時間の条件 (b) に反するが、 D の最悪時の効率を議論するには、制限時間として n^2 を使い、 $\text{time}_D(l) = O(l^2)$ と評価しても十分である。

例4.9. 制限時間 n^2 が条件(c)を満たすこと

13/14

入力列 $x \rightarrow O(|x|^2)$ 時間以内で出力 $0^{|\epsilon|}$ を出力.
以下に基本的なアイデアを示す(プログラム sq)

```
w1:=x # 0; y:=ε; xは入力変数, yは出力変数
while w1 ≠ ε do
  w1:=right(w1); w2:=x;
  while w2 ≠ ε do      このループで
    w2:=right(w2); y:=y # 0; |y| ← |y|+|x|となる
  end-while
end-while;
```

入力の長さを l とすると,
内側の while ループは l 回 (1回あたり3ステップ)
外側の while ループは $l+1$ 回
全体で $2+(l+1)(3+3l) = 3l^2 + 6l + 5$
 $\text{time_sq}(l) = O(l^2)$

14/14

定理4.2: 関数 t_1, t_2 を任意の自然な制限時間とする. このとき,
 $t_1 + t_2, t_1 \times t_2, t_1 \circ t_2$ も自然な制限時間.

定理4.3: すべての制限時間 t_1, t_2 に対し,
 $t_1 = O(t_2) \rightarrow \text{TIME}(t_1) \subseteq \text{TIME}(t_2)$.

証明:

すべての L で, $L \in \text{TIME}(t_1) \rightarrow L \in \text{TIME}(t_2)$ を示せばよい.
定義より, L を $O(t_1)$ で認識するプログラム A が存在.

つまり, $\text{time}_A = O(t_1)$.
 $t_1 = O(t_2)$ だから,
 $\text{time}_A = O(t_2)$.
よって, L の時間計算量は $O(t_2)$.
すなわち, $L \in \text{TIME}(t_2)$.

証明終