1/13

3.4. 還元可能性と完全性

- 問題の還元可能性
  …問題の相対的な難しさを測る方法
- 問題のあるクラスに関する完全性
  …そのクラス内で最も難しいことを示す方法

クラスREに属している集合の“難しさ”の比較

Aは帰納的だがBは帰納的でないとき，
BはAより難しいと言える．

では，AとBが共に帰納的でない場合は？
← 帰納的還元性による比較

A, B : 集合
AをBへ還元する ← Aの認識問題をBの認識問題に言い換えること．
（AはBへ還元可能）

2/13

定義3.4:
A, B : 任意の集合
(1) 次の条件を満たす関数 h をAからBへの帰納的還元という．
  (a) h は Σ^* からΣ^* への関数（全域的）
  (b) $\forall x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
  (c) h は計算可能
(2) AからBへの帰納的還元が存在するとき，
  AはBへ帰納的に還元可能という．

なお，AがBへ帰納的還元可能であることを$A \leq_m B$と記述する．
(m は，recursive many-one reduction の m)

3/13

例3.10
EVEN＝{ $\lceil n \rceil$ ：nは偶数}，　ODD＝{ $\lceil n \rceil$ ：nは奇数}
$\lceil n \rceil$ はnの２進表記（n: 自然数）

$$h_1(x) \equiv \begin{cases} \lceil n+1 \rceil & x = \lceil n \rceil \text{となっているとき} \\ x, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

この h_1 は明らかに全域的かつ計算可能．また，

$$\forall x \in \Sigma^*[x \in \mathrm{EVEN} \leftrightarrow h_1(x) \in \mathrm{ODD}]$$

よって，h_1 はEVENからODDへの帰納的還元
$\therefore \mathrm{EVEN} \leq_m \mathrm{ODD}$

同じ h_1 がODDからEVENへの帰納的還元にもなっている．

$$\forall x \in \Sigma^*[x \in \mathrm{ODD} \to h_1(x) \in \mathrm{EVEN}]$$
$$\begin{aligned} \forall x \in \Sigma^*[h_1(x) \in \mathrm{EVEN} &\to \exists n \geq 0[h_1(x) = \lceil n+1 \rceil \in \mathrm{EVEN}]] \\ &\to \exists n \geq 1[h_1(x) = \lceil n+1 \rceil \in \mathrm{EVEN}]] \\ &\to \exists n \geq 1[x = \lceil n \rceil \in \mathrm{ODD}]] \to [x \in \mathrm{ODD}] \end{aligned}$$
$$\therefore \mathrm{ODD} \leq_m \mathrm{EVEN}$$

4/13

EVENからODDへのもっと単純な還元

$$h_2(x) \equiv \begin{cases} 1 & x \in \mathrm{EVEN}\text{のとき} \\ 2 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

自然数の偶奇が判定可能なので，h_2 は計算可能

$1 \in \mathrm{ODD}, 2 \notin \mathrm{EVEN}$だから
$x \in \mathrm{EVEN} \to h_2(x) = 1 \in \mathrm{ODD}$
$x \notin \mathrm{EVEN} \to h_2(x) = 2 \notin \mathrm{ODD}$
$\therefore x \in \mathrm{EVEN} \leftrightarrow h_2(x) \in \mathrm{ODD}$

5/13

定理3.12: $A \leq_m B$という関係にある任意の集合A,Bを考える．このとき，Bが帰納的→Aも帰納的．

証明：
$A \leq_m B$→ AからBへの帰納的還元 h が存在する．
よって，$x \in A$という判定問題 → $h(x) \in B$？
つまり，次のプログラムはAを認識する．

```
prog A(input x);
begin
   if h(x)∈ B then accept else reject end-if
end.
```

Bが帰納的なら，Bを認識するプログラムが存在する．
→$h(x) \in B$を判定するプログラム
これで上記のプログラムAが完成．
よって，Aは帰納的．　　　　　　証明終

6/13

与えられた集合が“手に負えない”ことを示すための方法を示唆
(i) $A \leq_m B$ かつ
(ii) Aは帰納的でない． ⇒ このような集合Aを示せれば，Bは帰納的でない

例3.11:

ZERO $\equiv$ {a: IsProgram(a) ∧ ∀x[f_a(x) = 0]}
ZEROFT $\equiv$ {a: IsForTimes(a) ∧ ∀x[f_a(x) = 0]}
TOTAL $\equiv$ {a: IsProgram(a) ∧ ∀x[f_a(x) ≠⊥]}

まとめると

関係	したがって，
$\overline{\mathrm{HALT}} \leq_m$ ZERO	ZERO ∉ REC （$\overline{\mathrm{HALT}}$ ∉ RECより）
$\overline{\mathrm{HALT}} \leq_m$ ZEROFT	ZEROFT ∉ REC （$\overline{\mathrm{HALT}}$ ∉ RECより）
ZERO $\leq_m$ TOTAL	TOTAL ∉ REC （ZERO ∉ RECより）

7/13

定理3.13. $A \leqq_m B$という関係にある任意の集合A, Bを考える.
このとき、次のことが成り立つ。
(1) $B \in$ RE →$A \in$ RE （Bが枚挙可能 →Aも枚挙可能）
(2) $B \in$ co-RE →$A \in$ co-RE

(補注) 対偶を考えると、
(1) $A \notin$ RE → $B \notin$ RE
(2) $A \notin$ co-RE → $B \notin$ co-RE

例3.11, 定理3.13 → ZERO、TOTALは
REにもco-REにも属さない。

性質	理由
ZERO ∉ RE	$\overline{\text{HALT}}$ ∉ RE、$\overline{\text{HALT}} \leqq_m$ ZERO
ZERO ∉ co-RE	HALT ∉ co-RE、HALT $\leqq_m$ ZERO
TOTAL ∉ RE	ZERO ∉ RE、ZERO $\leqq_m$ TOTAL
TOTAL ∉ co-RE	ZERO ∉ co-RE、ZERO $\leqq_m$ TOTAL

8/13

還元可能性 ： 難しさを比較する手段
$A \leqq_m B \to A$の認識問題をBの認識問題に変換できる。
↓
Aの難しさ ≦ Bの難しさ
（Bを認識するプログラムがあればAの認識に使える。）

定理3.14.
任意に与えられた集合 A, B, C に対し、次の関係が成り立つ
(1) $A \leqq_m A$
(2) $A \leqq_m B$ かつ $B \leqq_m C$ ならば $A \leqq_m C$

$A \equiv_m B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \leqq_m B$ かつ $B \leqq_m A$

$\equiv_m$ は同値関係（同程度の難しさ）

$A \equiv_m B$ のとき、A と B は $\equiv_m$-同値という。

9/13

例3.13.
ZERO $\not\in$ RE ∴ ZERO $\not\leq_m$ HALT
（∵ ZERO $\leq_m$ HALTとすると、HALT ∈ REなので
ZERO ∈REとなり矛盾）
一方、HALT $\leq_m$ ZERO
∴ZEROはHALTより真に難しい。

例3.14.
すべての帰納的集合は互いに帰納的に同値。
たとえば、EVEN（偶数の集合）とPRIME（素数の集合）は
帰納的に同値
EVEN $\equiv_m$ PRIME
（両方とも帰納的という意味で同程度の難しさ）

どちらも計算できるという
意味で同程度に難しい

10/13

“クラスREの中で最も難しい集合”の定義
（one of the most difficult sets in RE）

定義3.5.
集合 A が次の条件を満たすとき、それを（$\leqq_m$ のもとで）
RE-完全（RE-complete）という。
(a) $\forall L \in$ RE ［$L \leqq_m A$］
（A より真に難しいものはREには存在しない
(b) $A \in$ RE

集合Aが上記の条件(a)だけを満たすとき、
RE-困難（RE-Hard）という。
（すべてのRE集合より難しい集合のこと）

11/13

定理3.15: HALTはRE-完全

（証明）
HALT ∈ REなので、条件(b)はOK。
L:任意のRE集合とする。
→Lを半認識するプログラム L が存在する

すべての $x \in \Sigma^*$に対し、
$x \in L$ ⟺ Halt(「L」, x) ⟺ <「L」, x> ∈ HALT

よって、$h(x) \overset{\text{def}}{=}$ <「L」, x>は L からHALTへの帰納的還元。
（証明終）

12/13

定理3.16: A, B を任意の集合とする。
(1) [AがRE-困難] かつ [$A \leqq_m B$] ならば B はRE-困難
(2) A がRE-困難 ↔ $\overline{A}$ がco-RE-困難

例3.15. 定理3.16 を用いて、いろいろな集合の
困難性（完全性）を示す。

集合	難しさ	主な理由
HALT	RE-完全	定理3. 15
$\overline{\text{HALT}}$	co-RE完全	HALTがRE-困難、$\overline{\text{HALT}}$ ∈co-RE
ZEROFT	co-RE完全	$\overline{\text{HALT}}$がco-RE困難 、$\overline{\text{HALT}} \leq_m$ZEROFT
$\overline{\text{ZEROFT}}$	RE完全	ZEROFTがco-RE困難 、$\overline{\text{ZEROFT}}$ ∈ RE
ZERO	RE-困難、co-RE困難	HALT$\leq_m$ZERO、
TOTAL	RE-困難、co-RE困難	ZERO$\leq_m$TOTAL

H: RE-完全問題の集合

H: REの中で“最も難しい問題”

REC：REの中で“最もやさしい問題”

還元 $\leqq_m$ のもとで

定理3.17.

（1）REC $\cap$ $H = \phi$

（2）RE－（REC $\cup$ H）$\neq \phi$

（1）REC $\subsetneqq$ RE

REは同値関係 $\equiv_m$ のもとで閉じている。

（2）の証明は複雑なので省略。