3.4. 還元可能性と完全性

- 問題の還元可能性
  …問題の相対的な難しさを測る方法
- 問題のあるクラスに関する完全性
  …そのクラス内で最も難しいことを示す方法

クラスREに属している集合の“難しさ”の比較

Aは帰納的だがBは帰納的でないとき,
BはAより難しいと言える.

では, AとBが共に帰納的でない場合は？
← 帰納的還元性による比較

A, B : 集合
AをBへ還元する ← Aの認識問題をBの認識問題に言い換えること.
（AはBへ還元可能）

定義3.4:
A, B :任意の集合
(1) 次の条件を満たす関数 h をAからBへの帰納的還元という.
  (a) h は Σ^* からΣ^* への関数(全域的)
  (b) $\forall x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
  (c) h は計算可能
(2) AからBへの帰納的還元が存在するとき,
  AはBへ帰納的に還元可能という.

なお, AがBへ帰納的還元可能であることを$A \leq_m B$と記述する.
(m は, recursive *m*any-one reduction の m)

例3.10

EVEN＝{ $\lceil n \rceil$: nは偶数}，　ODD＝{ $\lceil n \rceil$: nは奇数}

$\lceil n \rceil$ はnの２進表記（n: 自然数）

$$h_1(x) \equiv \begin{cases} \lceil n+1 \rceil & x = \lceil n \rceil \text{となっているとき} \\ x, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

この h_1 は明らかに全域的かつ計算可能．また，

$$\forall x \in \Sigma^*[x \in \mathrm{EVEN} \leftrightarrow h_1(x) \in \mathrm{ODD}]$$

よって，h_1 はEVENからODDへの帰納的還元

$$\therefore \mathrm{EVEN} \ \le_m \ \mathrm{ODD}$$

同じ h_1 がODDからEVENへの帰納的還元にもなっている．

$$\forall x \in \Sigma^*[x \in \mathrm{ODD} \to h_1(x) \in \mathrm{EVEN}]$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \Sigma^*[h_1(x) \in \mathrm{EVEN} &\to \exists n \ge 0[h_1(x) = \lceil n+1 \rceil \in \mathrm{EVEN}]] \\ &\to \exists n \ge 1[h_1(x) = \lceil n+1 \rceil \in \mathrm{EVEN}]] \\ &\to \exists n \ge 1[x = \lceil n \rceil \in \mathrm{ODD}]] \to [x \in \mathrm{ODD}] \end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{ODD} \le_m \mathrm{EVEN}$$

EVENからODDへのもっと単純な還元

$$h_2(x) \equiv \begin{cases} 1 & x \in \text{EVEN}\text{のとき} \\ 2 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

自然数の偶奇が判定可能なので，h_2 は計算可能

$1 \in \text{ODD}, 2 \notin \text{EVEN}$だから

$$x \in \text{EVEN} \rightarrow h_2(x) = 1 \in \text{ODD}$$

$$x \notin \text{EVEN} \rightarrow h_2(x) = 2 \notin \text{ODD}$$

$$\therefore x \in \text{EVEN} \leftrightarrow h_2(x) \in \text{ODD}$$

**定理3.12: $A \leq_m B$という関係にある任意の集合A,Bを考える.
このとき, Bが帰納的→Aも帰納的.**

証明:

$A \leq_m B$➔ AからBへの帰納的還元 h が存在する.

よって, $x \in A$という判定問題 ➔ $h(x) \in B$？

つまり, 次のプログラムはAを認識する.

```
prog A(input x);
begin
    if h(x)∈B then accept else reject end-if
end.
```

Bが帰納的なら, Bを認識するプログラムが存在する.

→$h(x) \in B$を判定するプログラム

これで上記のプログラムAが完成.

よって, Aは帰納的.　　証明終

与えられた集合が“手に負えない”ことを示すための方法を示唆

(i) $A \le_m B$ かつ
(ii) Aは帰納的でない.

このような集合Aを示せれば，Bは帰納的でない

例3.11:

ZERO $\equiv$ {a: IsProgram(a) $\wedge \forall$x[f_a(x) = 0]}

ZEROFT $\equiv$ {a: IsForTimes(a) $\wedge \forall$x[f_a(x) = 0]}

TOTAL $\equiv$ {a: IsProgram(a) $\wedge \forall$x[f_a(x) $\neq \perp$]}

まとめると

関係	したがって，
$\overline{\mathrm{HALT}} \le_m$ ZERO	ZERO $\notin$ REC （$\overline{\mathrm{HALT}} \notin$ RECより）
$\overline{\mathrm{HALT}} \le_m$ ZEROFT	ZEROFT $\notin$ REC （$\overline{\mathrm{HALT}} \notin$ RECより）
ZERO $\le_m$ TOTAL	TOTAL $\notin$ REC （ZERO $\notin$ RECより）

定理3.13. $A \leqq_m B$という関係にある任意の集合A, Bを考える.
このとき、次のことが成り立つ。
(1)$B \in$RE →$A \in$RE (Bが枚挙可能 → Aも枚挙可能)
(2)$B \in$co-RE →$A \in$co-RE

(補注) 対偶を考えると、
(1) $A \notin$RE → $B \notin$RE
(2)$A \notin$co-RE → $B \notin$co-RE

例3.11, 定理3.13 → ZERO、TOTALは
REにもco-REにも属さない。

性質	理由
ZERO $\notin$ RE	$\overline{\text{HALT}} \notin$ RE、$\overline{\text{HALT}} \leqq_m$ ZERO
ZERO $\notin$ co-RE	HALT $\notin$ co-RE、HALT $\leqq_m$ ZERO
TOTAL $\notin$ RE	ZERO $\notin$ RE、ZERO $\leqq_m$ TOTAL
TOTAL $\notin$ co-RE	ZERO $\notin$ co-RE、ZERO $\leqq_\mathrm{m}$ TOTAL

還元可能性　：　難しさを比較する手段

$A \leqq_m B \rightarrow A$の認識問題を$B$の認識問題に変換できる。

↓

Aの難しさ $\leqq$ Bの難しさ

（Bを認識するプログラムがあればAの認識に使える。）

定理3.14.
任意に与えられた集合 A, B, C に対し、次の関係が成り立つ

(1) $A \leqq_m A$

(2) $A \leqq_m B$ かつ $B \leqq_m C$ ならば $A \leqq_m C$

$A \equiv_m B \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} A \leqq_m B$ かつ $B \leqq_m A$

$\equiv_m$ は同値関係（同程度の難しさ）

$A \equiv_m B$ のとき、A と B は $\equiv_m$-同値という。

例3.13.

$\mathrm{ZERO} \notin \mathrm{RE}$　　$\therefore$ $\mathrm{ZERO} \not\leq_m \mathrm{HALT}$

（$\because$ $\mathrm{ZERO} \leq_m \mathrm{HALT}$とすると、$\mathrm{HALT} \in \mathrm{RE}$なので
$\mathrm{ZERO} \in \mathrm{RE}$となり矛盾）

一方、$\mathrm{HALT} \leq_m \mathrm{ZERO}$

$\therefore$ ZEROはHALTより真に難しい。

例3.14.

すべての帰納的集合は互いに帰納的に同値。
たとえば、EVEN（偶数の集合）とPRIME（素数の集合）は
帰納的に同値

$$\mathrm{EVEN} \equiv_m \mathrm{PRIME}$$

（両方とも帰納的という意味で同程度の難しさ）

どちらも計算できるという
意味で同程度に難しい

“クラスREの中で最も難しい集合”の定義

（one of the most difficult sets in RE）

定義3.5.

集合 A が次の条件を満たすとき、それを（$\leqq_m$ のもとで）RE-完全（RE-complete）という。

（a）$\forall L \in$RE ［$L \leqq_m$ A］

（A より真に難しいものはREには存在しない

（b）A $\in$RE

集合Aが上記の条件（a）だけを満たすとき、RE-困難（RE-Hard）という。

（すべてのRE集合より難しい集合のこと）

定理3.15: HALTはRE-完全

（証明）

HALT ∈ REなので、条件(b)はOK。

L: 任意のRE集合とする。

→Lを半認識するプログラム L が存在する

すべての $x \in \Sigma^*$ に対し、

$x \in L$ ⟺ Halt(⌜L⌝, x) ⟺ <⌜L⌝, x> ∈ HALT

よって、$h(x) \stackrel{\text{def}}{=}$ <⌜L⌝, x> は L からHALTへの帰納的還元。

（証明終）

定理3.16: A, B を任意の集合とする。

（1）[AがRE-困難] かつ [$A \leqq_m B$] ならば B はRE-困難

（2）A がRE-困難 $\leftrightarrow$ $\overline{A}$ がco-RE-困難

例3.15. 定理3.16 を用いて、いろいろな集合の困難性（完全性）を示す。

集合	難しさ	主な理由
HALT	RE-完全	定理3．15
$\overline{\mathrm{HALT}}$	co-RE完全	HALTがRE-困難、$\overline{\mathrm{HALT}} \in$co-RE
ZEROFT	co-RE完全	$\overline{\mathrm{HALT}}$がco-RE困難 、$\overline{\mathrm{HALT}} \leq_m$ ZEROFT
$\overline{\mathrm{ZEROFT}}$	RE完全	ZEROFTがco-RE困難 、$\overline{\mathrm{ZEROFT}} \in$ RE
ZERO	RE-困難、co-RE困難	HALT$\leq_m$ZERO、
TOTAL	RE-困難、co-RE困難	ZERO$\leq_m$TOTAL

H: RE-完全問題の集合
　H: REの中で“最も難しい問題”
　REC : REの中で“最もやさしい問題”

還元 $\leq_m$ のもとで

定理3.17.
　（1）REC ∩ $H = \phi$
　（2）RE－(REC ∪ H) $\neq \phi$

（1）REC $\subsetneq$ RE
　RECは同値関係 $\equiv_m$ のもとで閉じている。
（2）の証明は複雑なので省略。