

6.2.2. 完全性の証明

(NP)完全性の証明方法

- (I) 定義通りに[すべての L]について示す
- (II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9(≡Cookの定理(SATでTMを模倣))

3SATなどは、形式
が一様なので扱い
やすい

基本的には...

1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する
→とても大変(手間がかかる)

(II)の例: 例6.4($3SAT \leq_m^P DHAM$), 定理6.10, ...

DHAMは一般のグラフ上でNP完全

DHAMは平面グラフに限定してもNP完全

DHAMは「頂点の次数=3」に限定してもNP完全

DHAMは2部グラフに限定してもNP完全...

6.2.2. Proof for completeness

Two ways to prove (NP-)completeness

(I) show 'for all L ' according to definition

(II) use some known complete problems

Ex for (I) : Theorem 6.7,

Theorem 6.9 (\doteq Cook's Theorem; simulate TM by SAT)

Easy to manipulate
since, e.g., 3SAT has a
uniform structure.

Basically...

1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae
→ pretty complicated and tedious

Ex for (II): Example 6.4 ($3SAT \leq_m^P$ DHAM), Theorem 6.10, ...

DHAM is NP-complete for general graphs

DHAM is NP-complete even for planar graphs

DHAM is NP-complete even for graphs with max degree=3

DHAM is NP-complete even for bipartite graphs ...

定理6.10: 以下にあげる集合はすべてNP-完全

(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)

(2) DHAM, VC (3SATからの還元)

(3) KNAP, BIN (3SATからの還元と $\text{KNAP} \leq_m^P \text{BIN}$)

(II) NP完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:

1. $3\text{SAT} \leq_m^P \text{VC}$

2. $\text{DHAM} \leq_m^P$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合

Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でもNP完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

Theorem 6.10 The following sets are all NP-complete:

- (1) 3SAT, SAT (reduction from ExSAT)
- (2) DHAM, VC (reduction from 3SAT)
- (3) KNAP, BIN (reduction from 3SAT and $\text{KNAP} \leq_m^P \text{BIN}$)

(II) Polynomial time reductions from NP-complete problems:

1. $3\text{SAT} \leq_m^P \text{VC}$
2. $\text{DHAM} \leq_m^P \text{DHAM}$ with vertices of degree ≤ 5

Vertex Cover: a vertex set that contains
at least one endpoint for each edge

Hamiltonian cycle: a cycle that visits all vertices exactly once

Note : DHAM remains NP-complete even if max degree 3.
But it is polynomial time solvable if max degree 2.

定理6.10(2) : VC は NP 完全問題

[証明] VC \in NP なので、 $3SAT \leq_m^P VC$ であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が与えられたとする。

F から以下の条件を満たすグラフと自然数の組 $\langle G, k \rangle$ が多項式時間で構成できることを示す：

F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

G の構成(F は n 変数 m 項とする)：

1. F の各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^- と、辺 (x_i^+, x_i^-) を加える
2. F の各項 $C_j = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺 $(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})$ を加える
3. 項 C_j のリテラル l_{i1} が x_i のときは辺 (l_{i1}, x_i^+) を、 $\neg x_i$ のときは辺 (l_{i1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n + 2m$

Theorem 6.10(2) : VC is NP-complete

[Proof] Since $VC \in NP$, we show $3SAT \leq_m^P VC$.

For given formula $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, we construct a pair $\langle G, k \rangle$ of a graph and an integer in polynomial time.

There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

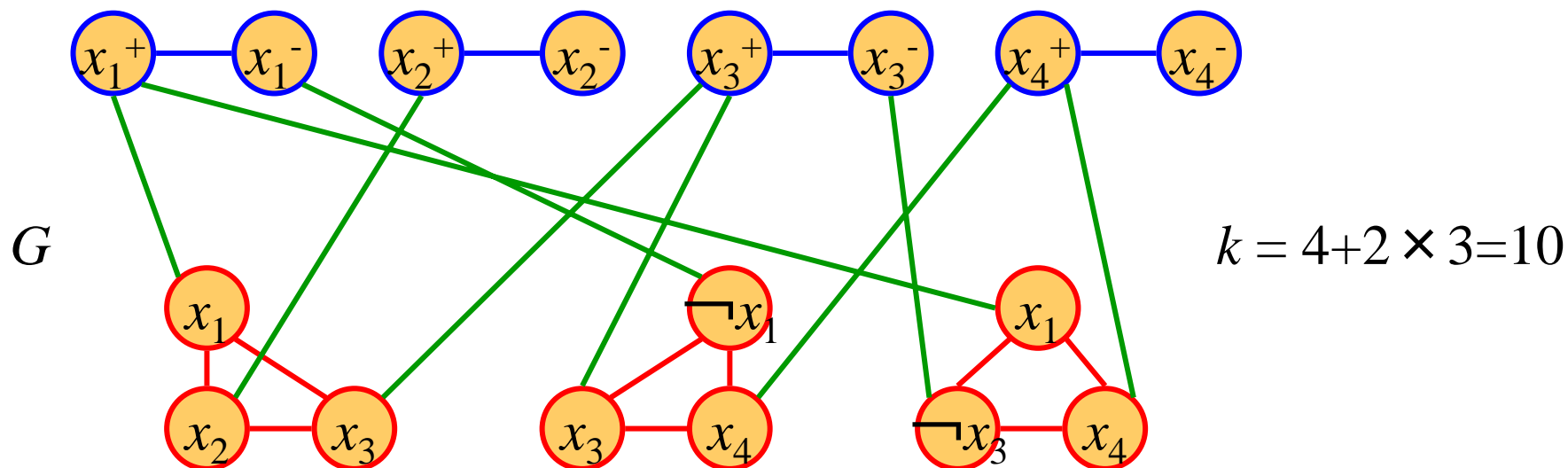
1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F , add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges $(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})$
3. add the edge (l_{i1}, x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i , or add (l_{i1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n + 2m$

F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

G の構成(F は n 変数 m 項とする):

1. F の各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^- と、辺 (x_i^+, x_i^-) を加える
2. F の各項 $C_j = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺 $(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})$ を加える
3. 項 C_j のリテラル l_{i1} が x_i のときは辺 (l_{i1}, x_i^+) を、 $\neg x_i$ のときは辺 (l_{i1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n + 2m$

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

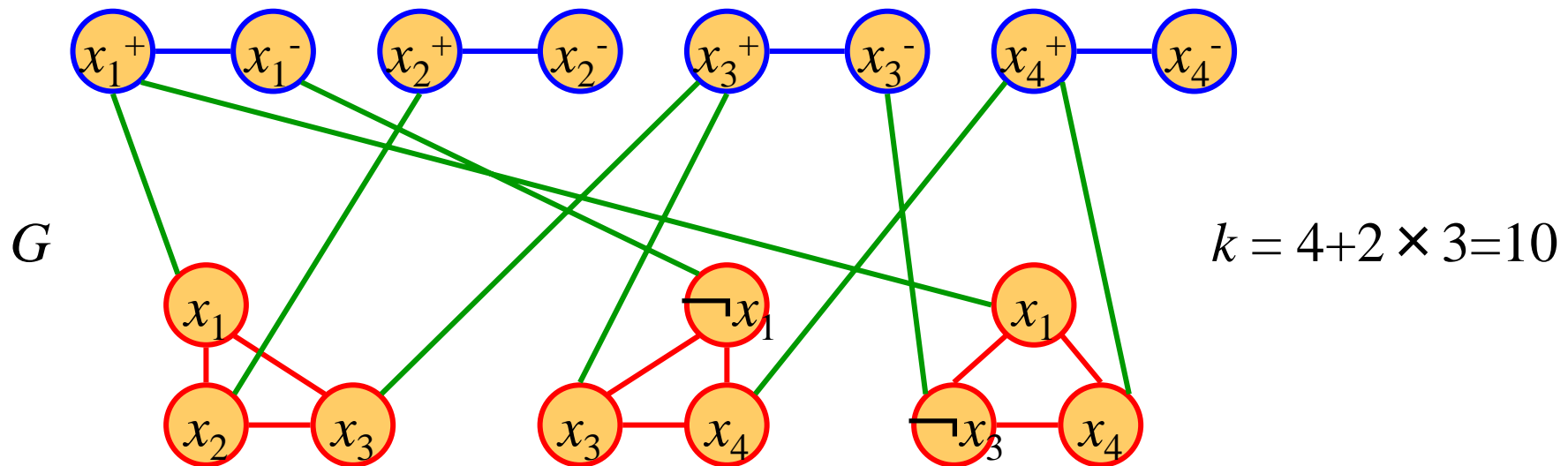


There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F , add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges $(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})$
3. add the edge (l_{i1}, x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i , or add (l_{i1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n + 2m$

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



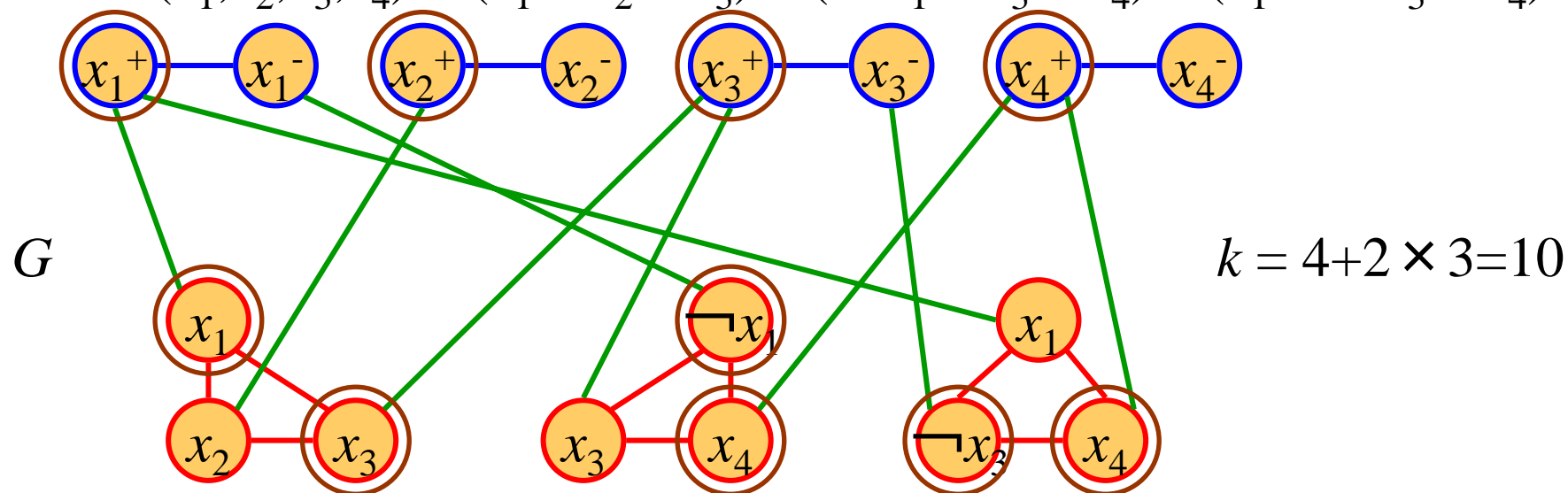
G の構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能。したがって以下を示せばよい:

F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

観察:

G の構成から任意の頂点被覆 S は $\left\{ \begin{array}{l} x_i^+, x_i^- \text{のどちらかを含む} \\ C_j \text{の3頂点中、最低2つ含む} \end{array} \right.$ によって $|S| \geq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F . Hence, we show that...

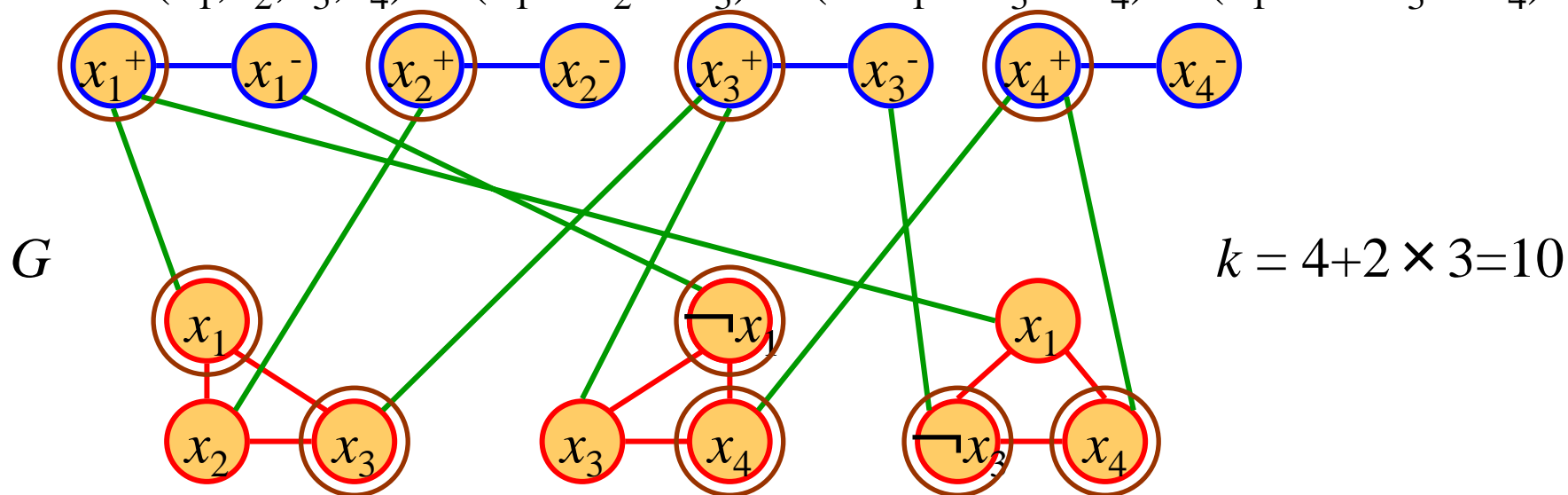
There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Observation:

From the construction of G ,
 any vertex cover S should contain $\left\{ \begin{array}{l} \text{at least one of } x_i^+ \text{ or } x_i^- \\ \text{at least 2 of 3 vertices in } C_j \end{array} \right.$

Hence we have $|S| \geq n+2m = k$.

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

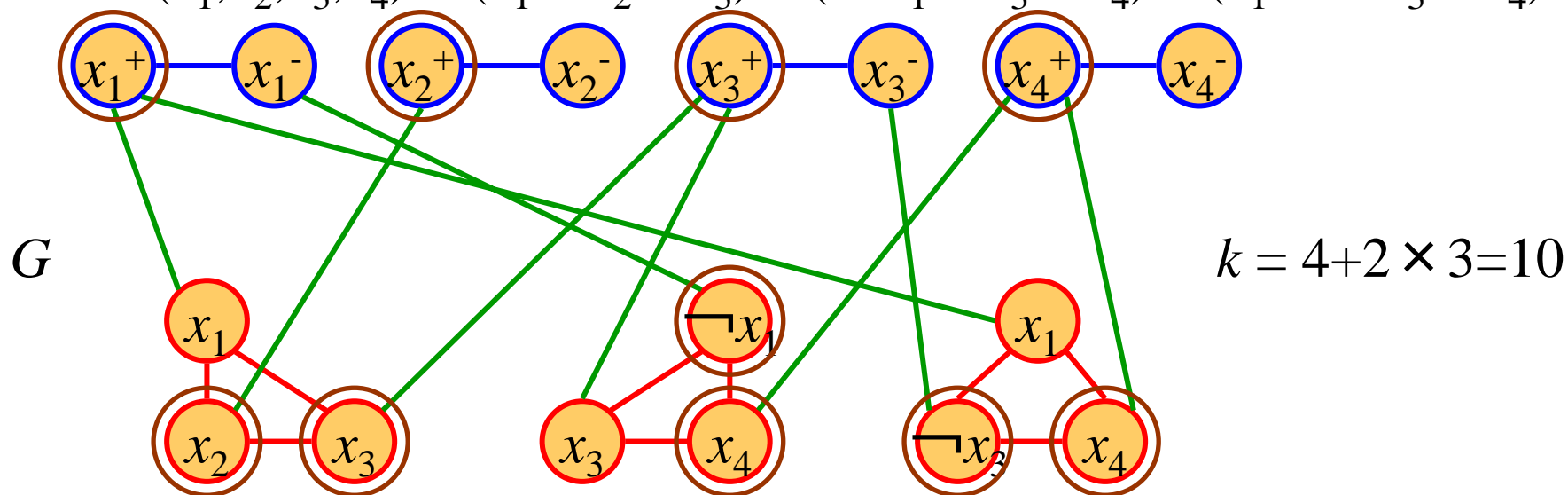


F を1にする割当が存在する $\Rightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

1. それぞれの変数 x_i が $\begin{cases} x_i=1 \text{ なら } x_i^+ \text{ を } S \text{ に入れる} \\ x_i=0 \text{ なら } x_i^- \text{ を } S \text{ に入れる} \end{cases}$
2. それぞれの項 $C_j=(l_{i_1}, l_{i_2}, l_{i_3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i_1})については変数との間の辺(l_{i_1}, x_{i_1})は x_{i_1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i_2}, l_{i_3})を S に入れる。

\Rightarrow **観察** より、 S はサイズ k の頂点被覆になる。

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

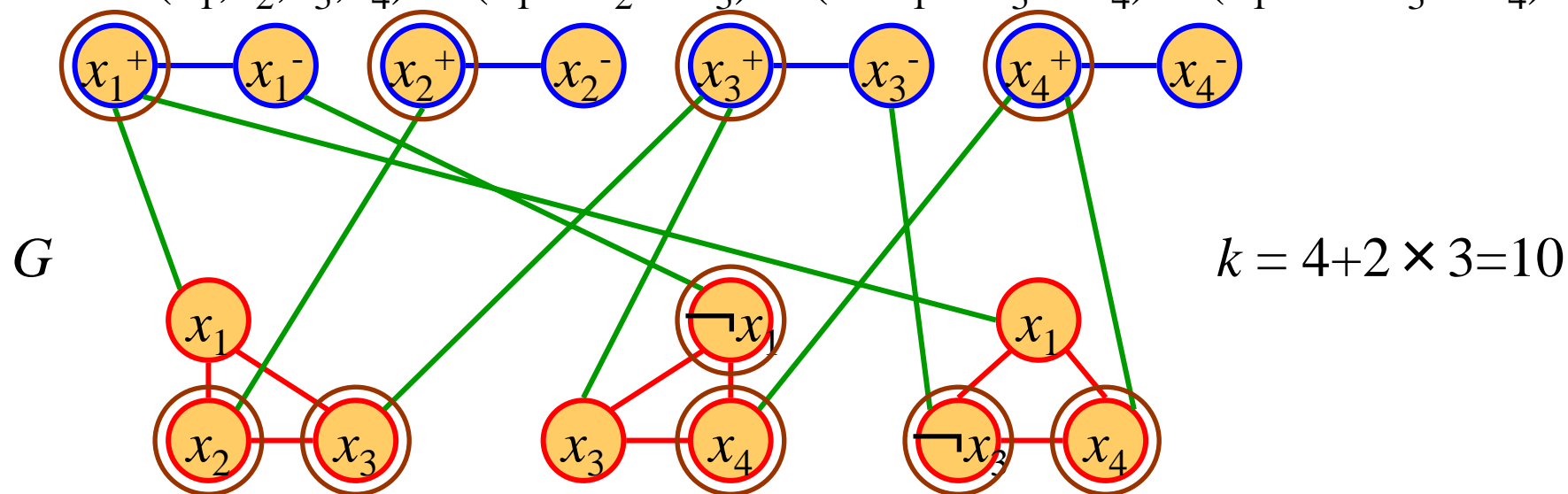


If there is an assignment that makes $F()=1$,
 G has a vertex cover of size k

1. Put $\left\{ \begin{array}{l} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{array} \right\}$ into S for each x_i .
2. Since each clause $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{i1} , the edge (l_{i1},x_{i1}) is covered by the variable x_{i1} . Therefore, put the remaining literals (l_{i2},l_{i3}) into S .

\Rightarrow From the **Observation**, S is a vertex cover of size k .

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

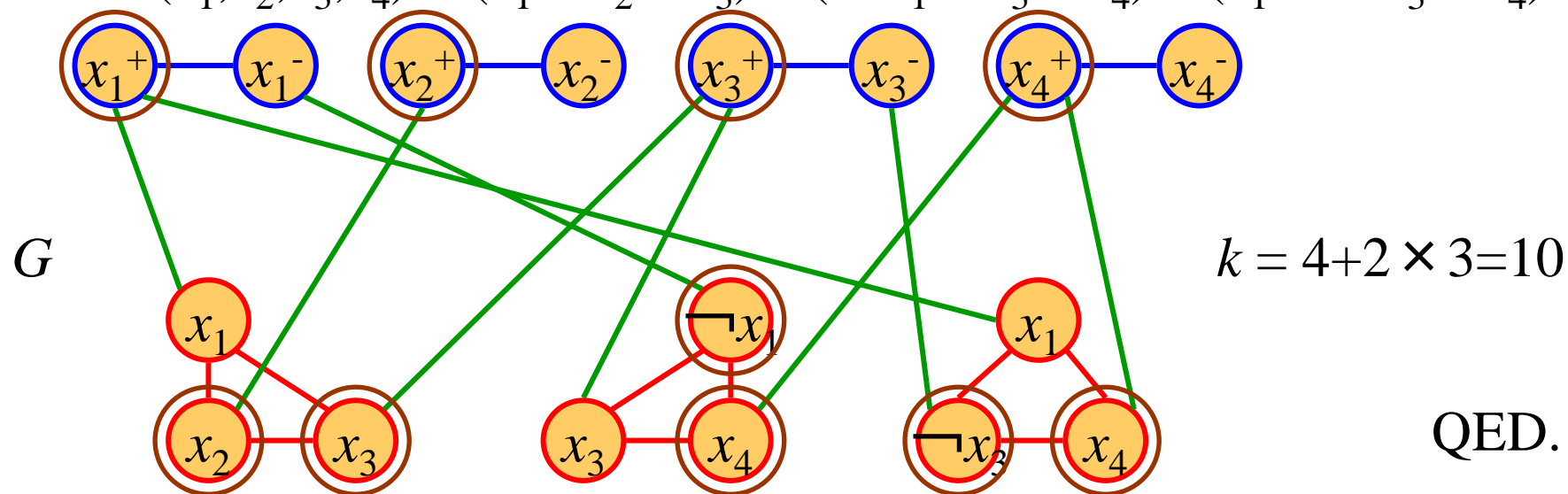


G がサイズ k の頂点被覆を持つ $\Rightarrow F$ を1にする割当が存在する

1. **観察** より、被覆 S は項から $2m$ 個、変数から n 個の頂点を含む。
2. さらに各変数 x_i については x_i^+ か x_i^- の一方しか、各項 C_j についてはちょうど2つの頂点しか S に含むことができない。
3. よって各項 C_j は S に含まれないリテラル l_i を含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_i^+ \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^- \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=0 \end{array} \right]$ という割当は F を充足する。

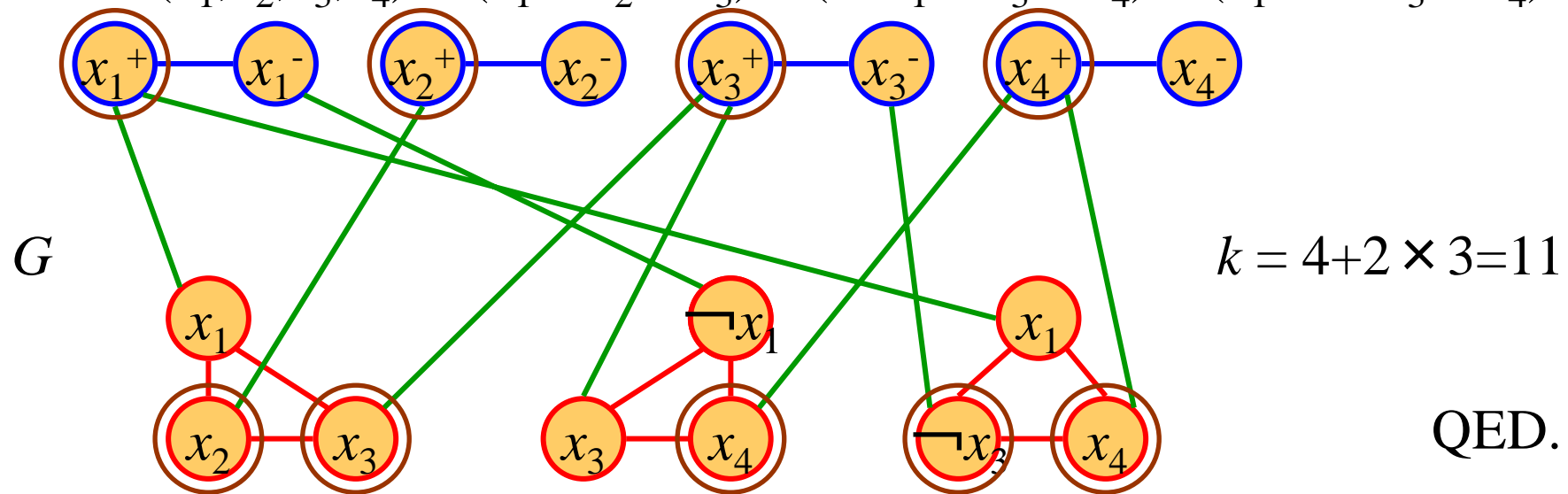
例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



1. From **Observation**, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
2. Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j .
3. Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S , and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

⇒ The following assignment satisfies $F: \begin{cases} x_i=1 & \text{if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 & \text{if } x_i^- \text{ in } S \end{cases}$

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

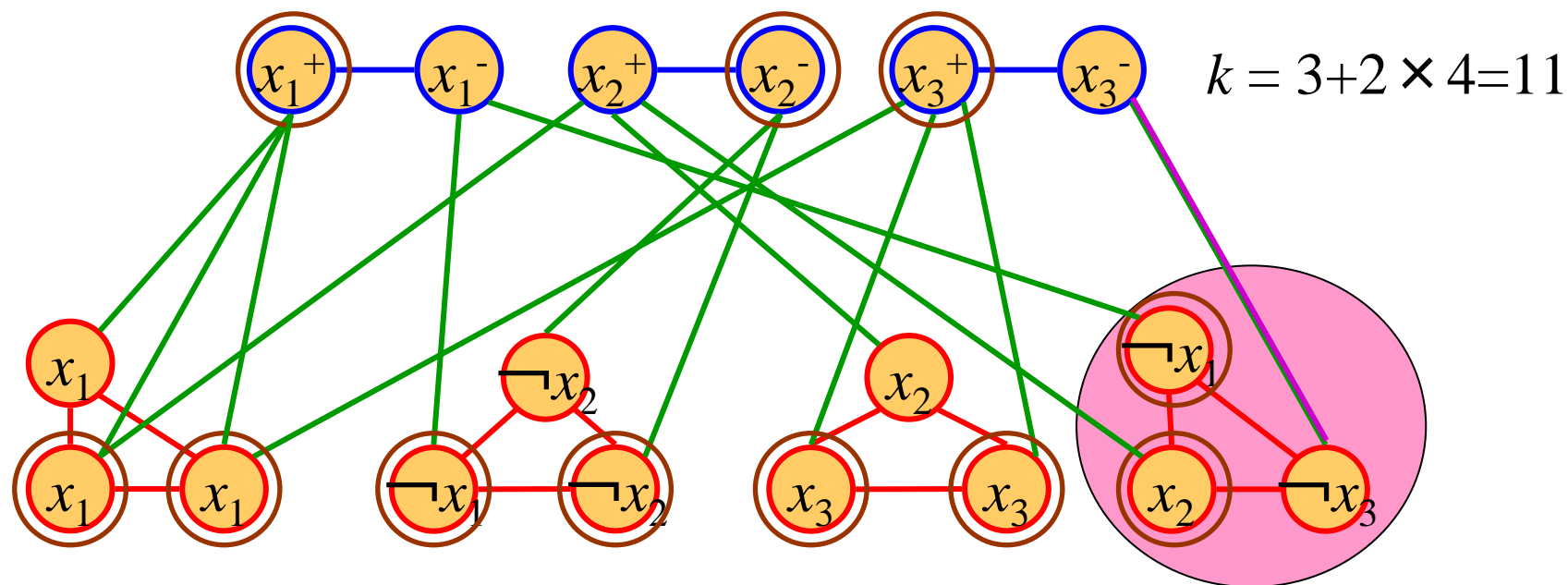


QED.

充足できない例:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \\ \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G

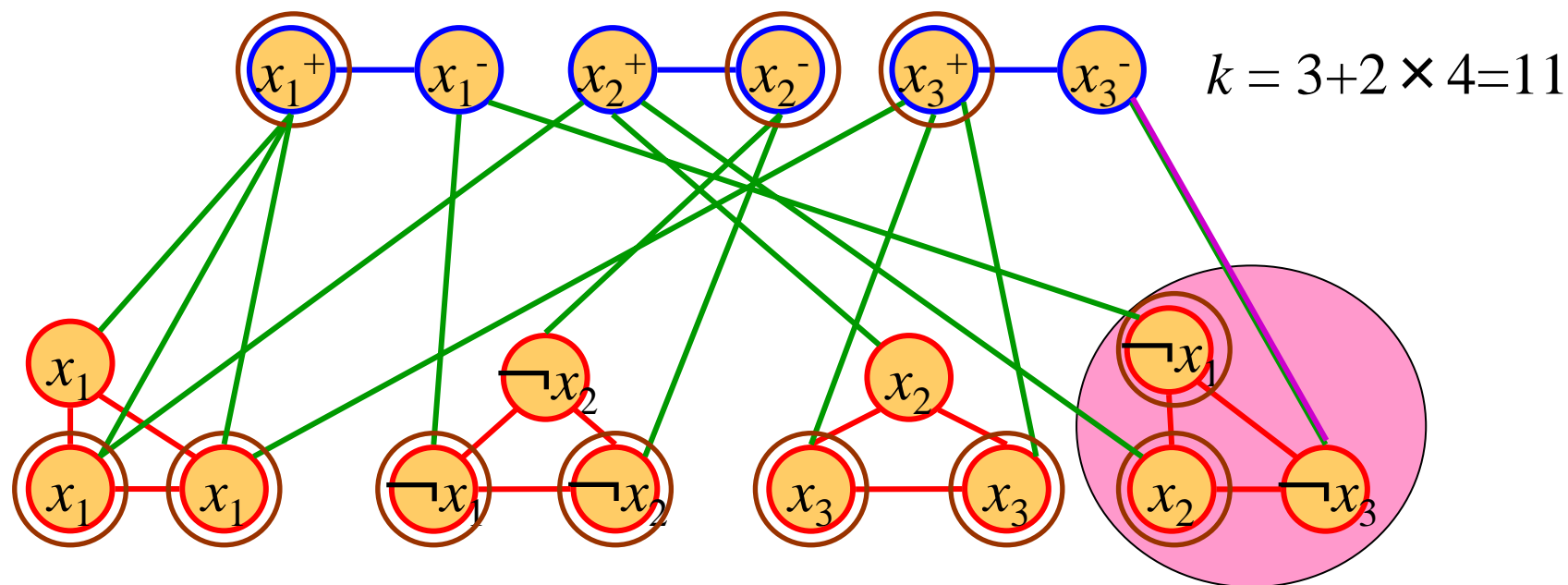


充足できない F では、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは $k+1$ 以上になる。

Unsatisfiable example:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \\ \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G



When F is unsatisfiable, it contains at least one clause such that each literal is not covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain three literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least $k+1$.

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は NP 完全問題

[証明] (上記の問題を $\text{DHAM}_{\leq 5}$ と略記する)

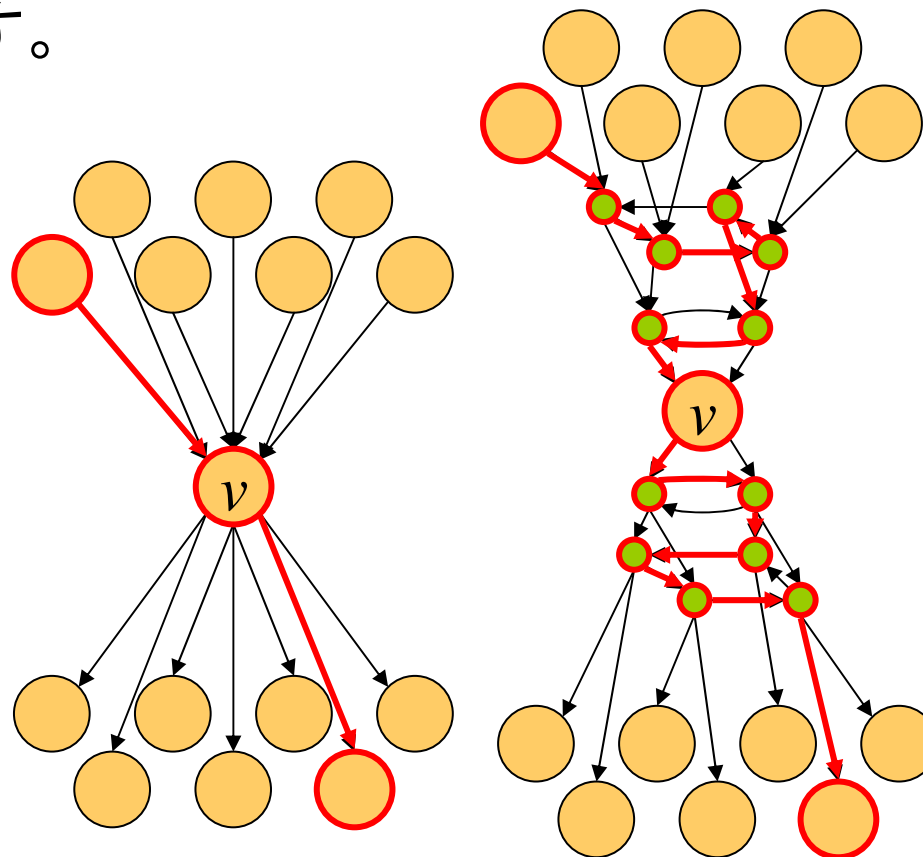
$\text{DHAM}_{\leq 5}$ が NP に属するのは、DHAM が NP に属することから自明。したがって完全性を示せばよい。
 $\text{DHAM}_{\leq m}^P \text{DHAM}_{\leq 5}$ を示す。

次数: 頂点に付随する辺の本数

アイデア:

次数14の頂点 v (左) の (入ってくる辺集合) と (出ていく辺集合) を右図の 'gadget' で置き換える

左図で v を1度だけ通る閉路と右図で v を1度だけ通る閉路は対応する。



**Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5
(abb. $\text{DHAM}_{\leq 5}$) is NP-complete**

degree: the number of edges incident to a vertex

[Proof]

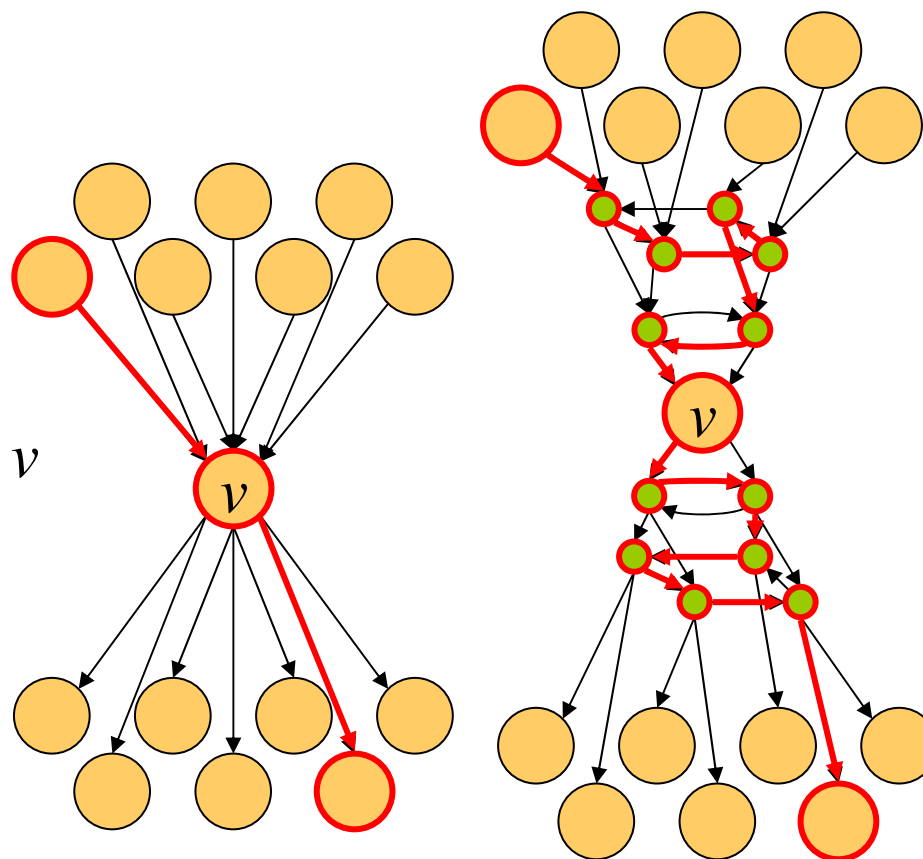
Since $\text{DHAM} \in \text{NP}$, $\text{DHAM}_{\leq 5} \in \text{NP}$.

We $\text{DHAM}_{\leq 5} \leq_m^P \text{DHAM}_{\leq 5}$.

Idea:

Replace the set of “arcs to v ” and the set of “arcs from v ” by a right ‘gadget’.

A Hamiltonian cycle through v on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through v on the resultant graph.

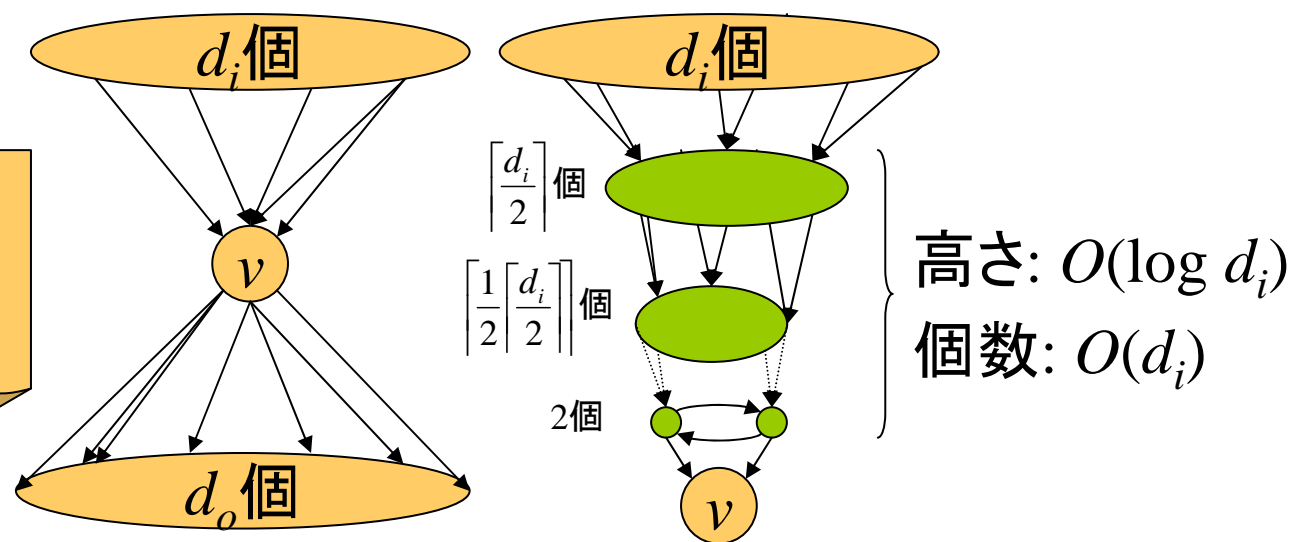


定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は NP 完全問題

アイデア:

ポイント:

- 各閉路は上から下
- 各頂点は次数 ≤ 5



[証明(概要)]

与えられたグラフ G の次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

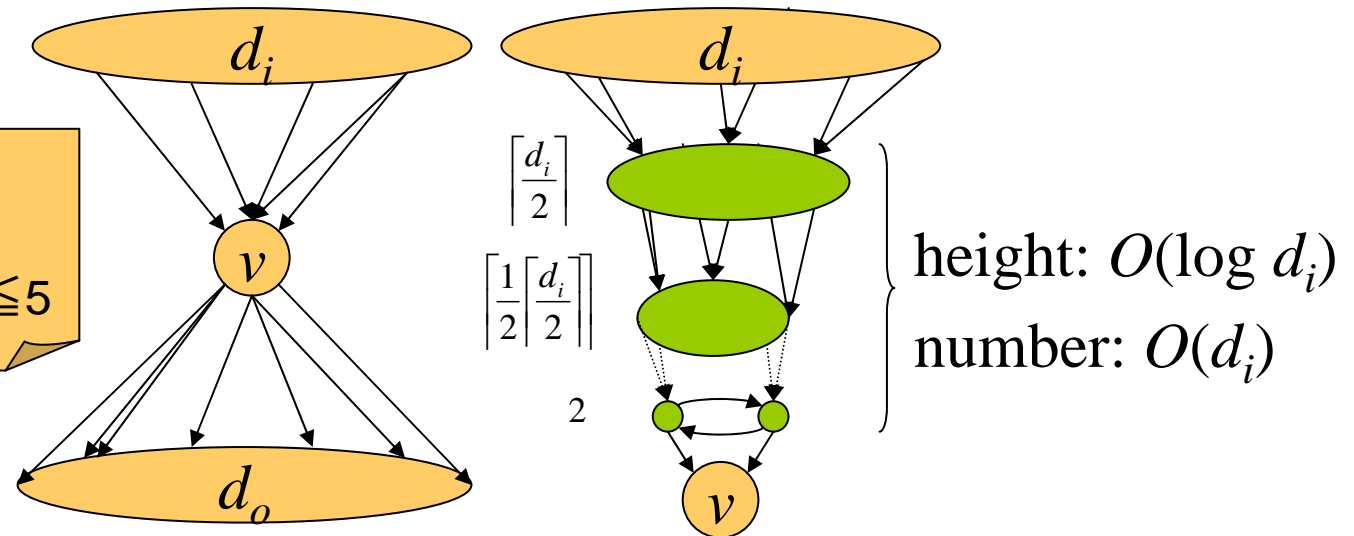
1. 元のグラフ G が n 頂点 m 辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフ G' は $O(n+m)$ 頂点 $O(m)$ 辺となる。したがって上記の還元は G の大きさの多項式時間で可能。
2. また G' のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. G がハミルトン閉路をもつ $\Leftrightarrow G'$ がハミルトン閉路を持つ QED.

Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5
(abb. $\text{DHAM}_{\leq 5}$) is NP-complete

Idea:

Points:

- Up to down via **cycle**
- Each vertex has $\text{deg} \leq 5$




[Proof (sketch)]

For each vertex v of degree ≥ 6 , replace the edges around v by the gadget.

1. If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m .
2. Each vertex in G' has degree *at most 5*.
3. G has a Hamiltonian cycle $\Leftrightarrow G'$ has a Hamiltonian cycle. QED.

残りの予定

- 7月22日(金): アンケート実施
- 7月27日(水):
 - 授業は休講
 - オフィスアワー: 6回目のレポートの回収、解答と解説
- 7月29日(金):
 - 期末試験(大講義室にて。遅刻厳禁) 
- それ以降:
 - 成績などの問い合わせはメールで
 - レポート、試験の返却希望者は適宜取りに来ること

レポート(6)は Max 15点くらい??